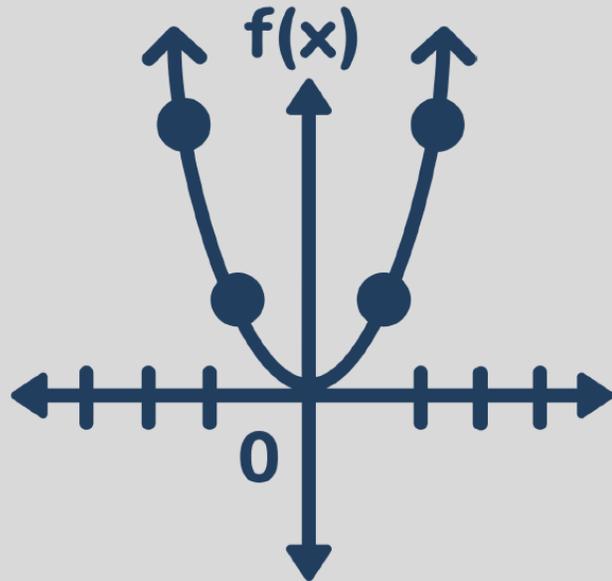




EDITORIAL PROYECTOS QR

# FUNCIONES 10

www.profesergiocm.com



NOMBRE: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES | DÉCIMO AÑO

## FUNCIONES 10°

TABLA DE CONTENIDOS

CONTENIDOS	Página
CONJUNTOS NUMÉRICOS	2
INTERVALOS REALES	7
OPERACIONES CON INTERVALOS	13
FUNCIONES MATEMÁTICAS: CONCEPTOS BÁSICOS	18
ANÁLISIS DE FUNCIONES	26
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES	36
FUNCIÓN LINEAL	41
PROBLEMAS CON FUNCIONES LINEALES	54
FUNCIÓN CUADRÁTICA	61
PROBLEMAS CON FUNCIONES CUADRÁTICAS	76
SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	82

COLEGIOS DIURNOS / NOCTURNOS / IPEC / CINDEA

**PRECIO: 9.000 [91 Pág]**

Este folleto se entrega en PDF y con personalización en el encabezado.

**TEL: 60147147**

TODOS LOS EJEMPLOS DEL FOLLETO VIENEN EXPLICADOS en VÍDEOS QR.

SE HAN AÑADIDO MÁS EJERCICIOS ADICIONALES  
El objetivo de esta MUESTRA es que pueda revisar el material previamente antes de su compra

### HABILIDADES:

- Analizar subconjuntos de los números reales.
- Utilizar correctamente los símbolos de pertenencia y de subconjunto.
- Representar intervalos numéricos en forma gráfica, simbólica y por comprensión.

### ACTIVIDAD DE INICIO:

Juan ha hecho una gran compra en el supermercado, y al llegar a casa, se da cuenta de que todas las bolsas de compras están revueltas. Hay alimentos, productos de limpieza y artículos de higiene personal mezclados en las bolsas. Juan quiere organizar todo en su cocina y alacena nueva, que está dividida en varios estantes y compartimentos. ¿Cuál es una manera en que él puede acomodar sus compras?



Es importante manejar algunos conceptos básicos para el estudio de los conjuntos.

### Conjunto:

Es una noción básica que no se puede definir claramente, pero se entiende como la colección de elementos que comparten una característica.

### Elemento:

Cada uno de los objetos que componen un conjunto.

### Conjunto vacío:

Es un conjunto que no contiene elementos. Se denota con los símbolos  $\emptyset$  o  $\{\}$ .

### Conjunto universo:

Es el conjunto que incluye todos los elementos en un contexto particular.

### Conjunto finito:

Es aquel que tiene un número limitado de elementos.

### Conjunto infinito:

Es aquel que no tiene un número limitado de elementos.

## CONJUNTOS NUMÉRICOS

A través de los años se han estudiado los siguientes conjuntos y subconjuntos numéricos

**Conjunto de los números NATURALES ( $\mathbb{N}$ ):** está formado por los números que se usan para contar. Por extensión se escribe  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Aquí podríamos mencionar entre otros, los siguientes subconjuntos:

Números pares:  $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

Números impares:  $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

Números primos:  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$

**Conjunto de los números ENTEROS ( $\mathbb{Z}$ ):** está formado por los números naturales, sus opuestos y el cero.  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Aquí podríamos mencionar los siguientes subconjuntos:

Números enteros positivos:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Números enteros negativos:  $\{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

**Conjunto de los números RACIONALES ( $\mathbb{Q}$ ):** está formado por todos los números que se escriben en forma de fracción de 2 enteros, con denominador diferente de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

La escritura decimal de un número racional es un número decimal finito o infinito periódico (puro o mixto). Aquí podríamos mencionar los siguientes subconjuntos:

Números Naturales:  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Números Enteros:  $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Racionales positivos:  $\{\dots, \frac{2}{3}, 6, \frac{1}{7}, \frac{14}{7}, 100, \dots\}$

**Conjunto de los números IRRACIONALES ( $\mathbb{I}$ ):** está formado por todos los números que no pueden escribirse en forma de fracción de 2 enteros.

$$\mathbb{I} = \left\{ x \neq \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

La escritura decimal de un número irracional es un número decimal infinito no periódico.

Algunos ejemplos de valores irracionales:  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt[3]{10}$ ,  $e+7$ ,  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{4}{\sqrt{3}}$

**Conjunto de los números REALES ( $\mathbb{R}$ ):** corresponde al conjunto formado por la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.

Simbólicamente:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

**Ejemplo #1:** Clasifique cada uno de los valores con el conjunto numérico al cual pertenece cada valor. Marque con X. Cada valor puede tener varias respuestas.

Valor	N	Z	Q	II	IR
18					
-6					
$\frac{6}{7}$					
$\sqrt{16}$					
$\pi + 8$					
$\sqrt[4]{-7}$					
$-8, \bar{3}$					
4,92378348...					
$\frac{-10}{e}$					
-7,25					
$\frac{2}{0}$					



## PERTENENCIA E INCLUSIÓN

### RELACIONES DE PERTENENCIA EN I

El concepto de pertenencia será el que vincula a los elementos con los conjuntos, a esta relación la llamaremos "relación de pertenencia". Esta relación en un elemento forma o no forma parte de un conjunto o intervalo. Cuando un elemento pertenece al conjunto, se puede usar el símbolo  $\in$ , de lo contrario se usaría el símbolo  $\notin$ .

Ejemplos:  $-5 \in \mathbb{Z}$        $-5 \notin \mathbb{N}$

### RELACIONES DE INCLUSIÓN EN I

Si A y B son dos conjuntos o intervalos y todos los elementos de A son también elementos de B, se dice que A está incluido en B o que A es subconjunto de B; simbólicamente se escribiría  $A \subset B$ . Sin embargo, cuando exista al menos un elemento del conjunto A, pero no pertenece al conjunto B entonces se dice que  $A \not\subset B$ .

Ejemplos:  $\left\{-3, 7, \frac{1}{4}, \sqrt{25}\right\} \subset \mathbb{Q}$        $\{\sqrt{34}, -\sqrt{20}, \pi\} \not\subset \mathbb{N}$        $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

**Ejemplo #2:** Con la guía del docente, resuelva los siguientes ejercicios.

a) Complete el espacio subrayado con los símbolos  $\in$  o  $\notin$  según corresponda.

$\frac{3}{4} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$        $\sqrt{25} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$        $\frac{4}{5} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$        $\frac{\pi}{2} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$   
 $\sqrt{54} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$        $e+1 \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$        $\sqrt{-25} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$        $0 \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$

b) Complete el espacio subrayado con los símbolos  $\subset$  o  $\not\subset$  según corresponda.

$\{7, -12, \pi\} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$        $\mathbb{R} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$        $\{-3, 6\} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$   
 $\left\{\frac{1}{3}, -4\right\} \underline{\hspace{1cm}} \left\{5\right\} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$        $\mathbb{N} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{II}$        $\{\sqrt{17}, \sqrt{3}\} \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q}$



**ACTIVIDAD #1:** Marque con X el valor que corresponde a la respuesta correcta.

1) ¿Cuál es un valor que sea racional pero no entero? ( ) $\frac{6}{7}$ ( ) 8      ( ) -4	2) ¿Cuál es un valor que sea natural pero no primo? ( ) 7      ( ) 9      ( ) 11
3) ¿Cuál es un valor que sea no racional? ( ) 6,999999... ( ) -4,373737373... ( ) 2,8721378651...	4) ¿Cuál es un valor que es impar negativo? ( ) 9      ( ) -5      ( ) -4
5) ¿Cuál es un valor que sea racional y positivo? ( ) 6,235674521... ( ) -4,25 ( ) 7,5	6) ¿Cuál es un valor que es racional, entero pero no natural? ( ) 101,5      ( ) -85      ( ) 90
7) ¿Cuál es un valor que sea natural y también sea primo? ( ) 21      ( ) 23      ( ) 25	8) ¿Cuál es un valor que es natural? ( ) $\frac{4}{8}$ ( ) $\frac{12}{3}$ ( ) $\frac{-18}{3}$
9) ¿Cuál es un valor que no es entero? ( ) $\sqrt[3]{8}$ ( ) $\sqrt{12}$ ( ) $\sqrt{49}$	10) ¿Cuál es un valor entero no natural? ( ) $\frac{-9}{3}$ ( ) $\frac{27}{3}$ ( ) $\frac{18}{10}$

**ACTIVIDAD #2:** Utilice las relaciones de pertenencia ( $\in$ ) o no pertenencia ( $\notin$ ) según corresponda.

- $-8$  \_\_\_  $\mathbb{N}$        $-\sqrt{45}$  \_\_\_  $\mathbb{Z}$        $-\sqrt{49}$  \_\_\_  $\mathbb{Q}$   
 $-\frac{4}{5}$  \_\_\_  $\mathbb{I}$        $\frac{6}{7}$  \_\_\_  $\mathbb{Z}$        $\frac{18}{6}$  \_\_\_  $\mathbb{N}$   
 $-80$  \_\_\_  $\mathbb{Q}^+$        $3,5$  \_\_\_  $\mathbb{Z}^+$        $-\sqrt{121}$  \_\_\_  $\mathbb{Q}^-$   
 $4,84746532\dots$  \_\_\_  $\mathbb{I}$        $\sqrt[3]{256}$  \_\_\_  $\mathbb{Z}$        $\sqrt{36}$  \_\_\_  $\mathbb{N}$

**ACTIVIDAD #3:** Utilice las relaciones de inclusión ( $\subset$ ) o no inclusión ( $\not\subset$ ) según corresponda.

- $\{-3, -7, -12\}$  \_\_\_  $\mathbb{N}$        $\{3, -5, 8, 100\}$  \_\_\_  $\mathbb{Z}$        $\{e, \pi\}$  \_\_\_  $\mathbb{Q}$   
 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{5}, \sqrt{69}\right]$  \_\_\_  $\mathbb{I}$        $\left[\frac{-6}{7}, 0, \frac{1}{3}\right]$  \_\_\_  $\mathbb{Z}^-$        $\{\sqrt{49}, -\sqrt{49}\}$  \_\_\_  $\mathbb{N}$   
 $\left\{\frac{1}{3}, \frac{-2}{5}, \frac{-6}{11}\right\}$  \_\_\_  $\mathbb{Q}^+$        $\mathbb{N}$  \_\_\_  $\mathbb{Q}$        $\mathbb{Q}$  \_\_\_  $\mathbb{I}$   
 $\mathbb{Q}$  \_\_\_  $\mathbb{I}$        $\mathbb{Z}^+$  \_\_\_  $\mathbb{Z}$        $\left\{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{7}\right\}$  \_\_\_  $\mathbb{Q}$

TRABAJO COTIDIANO – Conjuntos y Subconjuntos numéricos	Valoración
Analiza subconjuntos de los números reales	
Utiliza correctamente los símbolos de pertenencia	
Utiliza correctamente los símbolos de inclusión	

### INTERVALOS REALES

**ACTIVIDAD DE INICIO:**

Laura está organizando un club de lectura y solo invitará a personas que tengan edades mayores o iguales a 20 años, pero menores o iguales a 25 años. Sus amigas tienen 17, 20, 24, 34 y 37 años. ¿Cuántas de esas amigas NO pueden participar en el club de lectura?

Un intervalo de  $\mathbb{R}$  es un subconjunto de dicho conjunto considerando al menos un criterio de selección.



Los intervalos los tenemos en muchas situaciones de la vida cotidiana.

- Para dar los horarios de atención al público de un local: atendemos de 8 am a 12 md y de 2pm a 4:30pm.
- Para establecer la duración de una cita o una reunión: la conferencia tendrá lugar de 10 am a 12 md.
- Para indicar un rango de precios: las entradas al concierto están entre los €12000 y los €56000.
- Para indicar el rango de edades de matrícula: los estudiantes que deseen matricular en colegio nocturno deben tener al menos 15 años cumplidos.
- Para indicar la cantidad de personas que pueden estar en un sitio: un auto compacto está hecho para entre 1 y 4 pasajeros.

#### INTERVALOS CERRADOS, ABIERTOS Y SEMIABIERTOS

NOTACIÓN SIMBÓLICA	NOTACIÓN POR COMPRENSIÓN	NOTACIÓN GRÁFICA
$[a, b]$	$\{x / x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	
Ejemplo:		
$]a, b[$	$\{x / x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	
Ejemplo:		

FUNCIONES I DÉCIMO AÑO

$[a,b[$	$\{x / x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	
Ejemplo:		
		

INTERVALOS AL INFINITO

NOTACIÓN SIMBÓLICA	NOTACIÓN POR COMPRENSIÓN	NOTACIÓN GRÁFICA
$[a, +\infty[$	$\{x / x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	
Ejemplo:		
$]a, +\infty[$	$\{x / x \in \mathbb{R}, x > a\}$	
Ejemplo:		
$]-\infty, a]$	$\{x / x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	
Ejemplo:		
$]-\infty, a[$	$\{x / x \in \mathbb{R}, x < a\}$	
Ejemplo:		



En este video se puede repasar las distintas notaciones explicadas anteriormente, con otros ejemplos.

FUNCIONES I DÉCIMO AÑO

ACTIVIDAD #1: Represente en notación simbólica, los siguientes intervalos

- $\{x / x \in \mathbb{R}, \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{7}{2}\}$  \_\_\_\_\_.
- $\{x / x \in \mathbb{R}, e \leq x < \pi\}$  \_\_\_\_\_.
- $\{x / x \in \mathbb{R}, 12 < x < 36\}$  \_\_\_\_\_.
- $\{x / x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$  \_\_\_\_\_.
- $\{x / x \in \mathbb{R}, x > \frac{7}{2}\}$  \_\_\_\_\_.
- $\{x / x \in \mathbb{R}, x \geq 7\}$  \_\_\_\_\_.
- $\{x / x \in \mathbb{R}, 3 < x \leq 6\}$  \_\_\_\_\_.
- $\{x / x \in \mathbb{R}, x < 10\}$  \_\_\_\_\_.

ACTIVIDAD #2: Represente en notación de comprensión, los siguientes intervalos.

- $[-1, 2[$  \_\_\_\_\_.
- $] \sqrt{2}, 3[$  \_\_\_\_\_.
- $]-\infty, 0]$  \_\_\_\_\_.
- $] -5, 2]$  \_\_\_\_\_.
- $] -3, +\infty[$  \_\_\_\_\_.

ACTIVIDAD #3: Conteste lo que se solicita en cada caso.

1) Para el intervalo  $B = ]5, 12]$ , encierre con un círculo los valores que sí pertenecen a B

- 7      17      5      12       $\frac{7}{2}$        $\frac{17}{3}$        $\sqrt{49}$

2) Para el intervalo  $M = [-3, 10]$ , encierre con un círculo los intervalos que sí están incluidos en M.

- $] -8, -5[$        $] -5, 0[$        $] 12, 20[$        $] 0, 5[$        $] -2, 9[$        $] \frac{1}{2}, 7[$

**ACTIVIDAD #4:** Marque con X la opción correcta.

- ¿Cuál de los siguientes valores pertenece al intervalo  $[-5, 7[$  ?  
 A) 7                      B) -6  
 C) 0                        D) 8
- ¿Cuál de los siguientes valores pertenece al intervalo  $]-\infty, \frac{3}{2}]$  ?  
 A) 1                        B) 3  
 C) 5                        D)  $\sqrt{4}$
- ¿Cuál de los siguientes valores pertenece al intervalo  $\{x / x \in \mathbb{R}, x > -8\}$  ?  
 A) -9                      B) -8  
 C) -7                        D) -10
- ¿Cuál de los siguientes valores pertenece al intervalo  $\{x / x \in \mathbb{R}, e \leq x \leq \pi\}$  ?  
 A)  $\pi$                         B) 2  
 C) 4                        D) 1
- ¿Cuál de los siguientes intervalos está incluido en  $[-5, +\infty[$  ?  
 A)  $[-10, -7]$               B)  $[-2, 0]$   
 C)  $[-8, 8]$                 D)  $[-7, 5]$
- ¿Cuál de los siguientes valores está incluido en el intervalo  $]2, 13[$  ?  
 A)  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$             B)  $\{2, 5\}$   
 C)  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$             D)  $\{13, 14\}$
- La siguiente expresión  $]0, 9]$ , representada en notación por comprensión corresponde a  
 A)  $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 9\}$             B)  $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 < x < 9\}$   
 C)  $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 9\}$             D)  $\{x / x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 9\}$
- La siguiente expresión  $\{x / x \in \mathbb{R}, -10 \leq x < -8\}$ , representada en notación simbólica corresponde a  
 A)  $[-10, -8]$               B)  $[-10, -8]$               C)  $[-10, -8[$               D)  $]-10, -8[$

TRABAJO COTIDIANO – Intervalos Reales	Valoración
Representa los intervalos numéricos en forma simbólica y comprensión.	
Interpreta correctamente si un valor o subconjunto forma parte de un intervalo.	

**EJERCICIOS ADICIONALES**

El docente aclarará sobre: dominio, codominio y rango mencionados. Ahora lo importante es practicar las distintas notaciones.

- El intervalo  $]2, 17[$  corresponde al dominio de una función. Ese intervalo expresado en notación por comprensión corresponde a:  
 A)  $\{x / x \in \mathbb{R}, x > 2\}$   
 B)  $\{x / x \in \mathbb{R}, x < 17\}$   
 C)  $\{x / x \in \mathbb{R}, 2 < x < 17\}$   
 D)  $\{x / x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 17\}$
- El conjunto  $\{x / x \in \mathbb{R}, x \geq -5\}$  corresponde al rango de una función. Ese conjunto expresado en notación de intervalo es:  
 A)  $[-5, +\infty[$               B)  $]-5, +\infty[$   
 C)  $]-\infty, -5]$               D)  $]-\infty, -5[$
- El conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R}, x < 17\}$  corresponde al ámbito de una función. Ese conjunto expresado en notación de intervalo es:  
 A)  $[17, +\infty[$               B)  $]-\infty, 17]$   
 C)  $]17, +\infty[$               D)  $]-\infty, 17[$
- Sea la función f dada por  $f(x) = \frac{\pi}{e} x$ , donde  $\{x / x \in \mathbb{R}, -e < x \leq e\}$  es el dominio de f y  $\{x / x \in \mathbb{R}, -\pi \leq x < \pi\}$  es el codominio de f. El dominio de f expresado en forma gráfica corresponde a  
 A)               C)   
 B)               D) 

5) Sea la función  $f$  dada por  $f(x) = \frac{\pi}{e}x$ , donde  $\{x/x \in \mathbb{R}, -e < x \leq e\}$  es el dominio de  $f$  y  $\{x/x \in \mathbb{R}, -\pi \leq x < \pi\}$  es el codominio de  $f$ . El codominio de  $f$  expresado como un intervalo real corresponde a

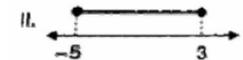
- A)  $]-e, e]$
- B)  $[-e, e[$
- C)  $]-\pi, \pi]$
- D)  $[-\pi, \pi[$



6) Sea la función  $f$ , tal que,  $f: A \rightarrow B$ ,  $A = [-2, 4]$  y  $B = [-5, 3]$ , considere las siguientes proposiciones:



Representación gráfica de A



Representación gráfica de B

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

7) Considere las siguientes proposiciones referidas al conjunto  $M = \{x/x \in \mathbb{R}, -3 < x < 4\}$ , el cual corresponde al dominio de una función.

- I.  $-4 \in M$
- II.  $[-3, 0] \subset M$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II



**HABILIDADES:**

- Determinar la unión y la intersección de conjuntos numéricos.
- Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.

**ACTIVIDAD DE INICIO:**

La pista de atletismo del Parque Metropolitano la Sabana, es un sitio que reúne a cientos de personas diariamente, que buscan mantener su estado de salud. Luis, Carlos y Sofía son personas que realizan caminatas diarias por la pista, pero con horarios diferentes. Luis lo hace puntualmente de 8:00am a 10:00am. Carlos lo hace puntualmente de 10:00am a 12:00pm. Mientras que Sofía camina de 12:00pm a 1:00pm.



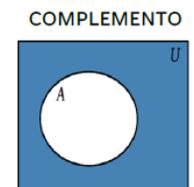
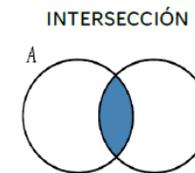
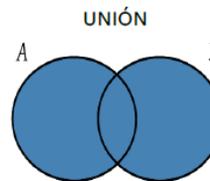
- a) ¿En qué horario de la pista caminaron Carlos y Sofía?
- b) En general, ¿en qué horario ha sido utilizada la pista por ellos tres?
- c) ¿Durante qué horario la pista NO fue utilizada por Carlos?

**OPERACIONES CON INTERVALOS**

**UNION DE CONJUNTOS NUMÉRICOS:** Sea A y B dos conjuntos numéricos, la unión es el conjunto formado por todos los elementos de A y B. Se denota  $A \cup B$ .

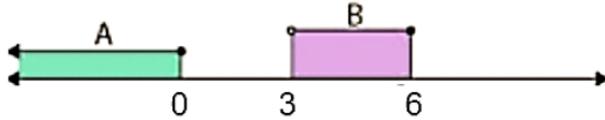
**INTERSECCIÓN CONJUNTOS NUMÉRICOS:** Sea A y B dos conjuntos numéricos, la intersección de A y B es el conjunto formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B. Se denota  $A \cap B$ .

**COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO:** El complemento de un conjunto A respecto al conjunto universo U es el conjunto de elementos de U que no pertenecen a A. Se denota como  $A^c$ .





c) Para la siguiente figura, considerando que  $\mathbb{R}$  es el conjunto universo, determine:



A = \_\_\_\_\_. B = \_\_\_\_\_.  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.

$A \cap B =$  \_\_\_\_\_.  $A^c =$  \_\_\_\_\_.

**ACTIVIDAD #3:** Complete lo que se solicita en cada caso. Sea  $\mathbb{R}$  el conjunto universo.

a) ¿Cuál es el complemento de  $]-\infty, 0]$ ?

b) ¿Cuál es el complemento de  $]7, +\infty[$ ?

c) ¿Cuál es el complemento de  $[0, 10]$ ?

d) ¿Cuál es el complemento de  $]-\infty, +\infty[$ ?

TRABAJO COTIDIANO – Intervalos: Unión, Intersección y Complemento	Valoración
Determina correctamente la unión de dos conjuntos numéricos.	
Determina correctamente la intersección de dos conjuntos numéricos.	
Determinar el complemento de un conjunto numérico dado.	

**EJERCICIOS ADICIONALES:** El docente aclarará sobre: dominio, codominio y rango.

Analice la siguiente información para responder los ítems 1 y 2:

Considere las siguientes funciones  $f$  y  $g$ :

$f: A \rightarrow C$ , donde  $A$  es el dominio  $A = \{x / x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 6\}$  y  $C$  es el codominio,

$C = \{x / x \in \mathbb{R}, -8 < x < -4\}$ .

$g: S \rightarrow B$ , donde  $S$  es el dominio  $S = \{x \in \mathbb{R}, 5 \leq x < 10\}$  y  $B$  es el codominio,

$B = \{x / x \in \mathbb{R}, -7 < x < 4\}$ .

1) La unión de  $A$  y  $S$  corresponde a

A)  $[5, 6[$

B)  $]5, 6]$

C)  $]5, 6[$

D)  $]5, 6]$

2) La intersección de  $C$  y  $B$  corresponde a

A)  $[5, 6]$

B)  $]5, 6[$

C)  $[2, 10]$

D)  $]7, -4[$

3) Sea  $M$  el dominio de una función, con  $M = \{x / x \in \mathbb{R}, x \geq 6\}$ . Si  $\mathbb{R}$  es el conjunto universo, entonces el complemento de  $M$  corresponde a

A)  $] -\infty, 6[$

B)  $] -\infty, 6]$

C)  $] 6, +\infty[$

D)  $] 6, +\infty]$

4) Si  $A = \{x / x \in \mathbb{R}, x < 4\}$  corresponde al dominio de una función  $f$ ,  $B = \{x / x \in \mathbb{R}, 1 \leq x\}$  corresponde al dominio de una función  $h$  y  $A \cap B = [m, v[$ , entonces, ¿cuál es el valor de "m"?

A) 1

B) 4

C) -1

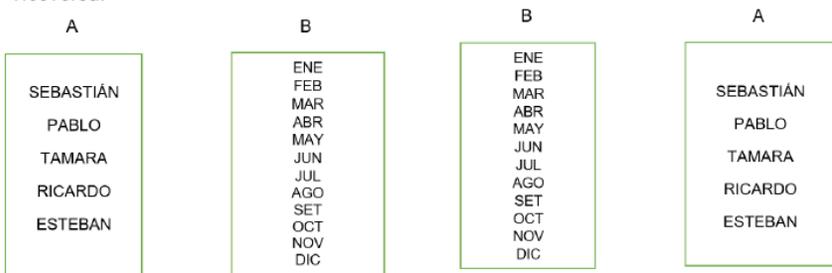
D) -4



**HABILIDAD:**

Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.

Analicemos las siguientes dos situaciones, donde relacionaremos un conjunto de cinco personas (puede hacerlo con 5 estudiantes del aula) con su mes de nacimiento o viceversa.

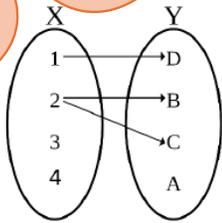
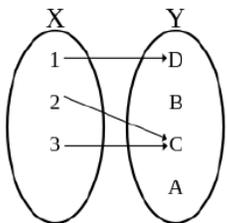


¿Cuál correspondería siempre a una función matemática?

**FUNCIONES MATEMÁTICAS**

**CONCEPTO DE FUNCIÓN:** Una función es una correspondencia entre dos conjuntos A y B no vacíos, donde a cada elemento de A (conjunto de partida) se le asocia un único elemento de B (conjunto de llegada).

Ahora analicemos estas dos relaciones para determinar cuál es una función a partir de este concepto anterior.



**CONCEPTOS BÁSICOS DE LAS FUNCIONES**

**Dominio:** Es el conjunto de partida en la función.

**Codominio:** Es el conjunto de llegada en la función.

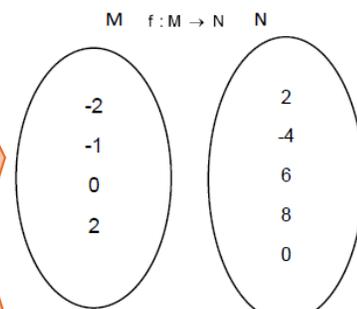
**Preimágenes (x):** Son todos los elementos del dominio de la función.

**Imágenes (y=f(x)):** elementos del codominio están asociados con las preimágenes de la función.

**Ámbito:** conjunto de todas las imágenes de la función (subconjunto del codominio).

$D_f =$  \_\_\_\_\_  $Cod =$  \_\_\_\_\_

$Ar =$  \_\_\_\_\_

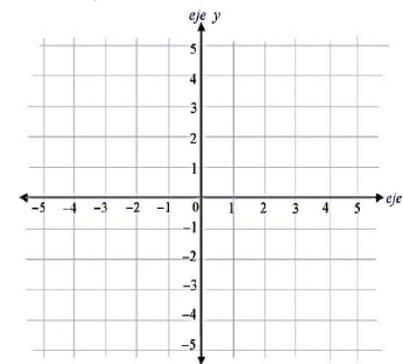


**NOTACIONES DE FUNCIONES**

Existen varias formas de representar una función: modelos matemáticos que es la forma algebraica, tablas que es la representación tabular o representaciones en el plano cartesiano que es la forma gráfica.

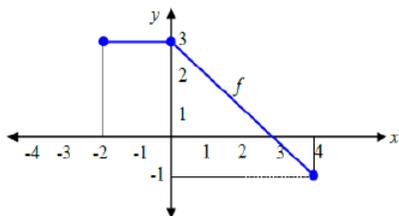
Si  $f(x)=2x+3$ , donde  $f: \{-3,-1,0,1\} \rightarrow \mathbb{Q}$ . Determine su ámbito, complete la representación tabular y represente la función en el plano.

x	f(x)



**EJEMPLO #1:** Guiado por el docente, analice por qué las siguientes relaciones **SÍ** corresponden a una función. Anote qué técnicas podemos implementar para reconocer cuando la relación **SÍ** es función.

X	Y
1	0
2	4
3	5
4	9
5	14

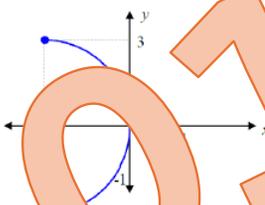


$f: \{-1, 0, 2\} \rightarrow \{0, 1, 3\}$  con  $f(x) = x + 1$

$G_f = \{(3, 4), (-2, 7), (0, 5), (2, 8), (4, 7)\}$

**EJEMPLO #2:** Guiado por el docente, analice por qué las siguientes relaciones **NO** corresponden a una función. Anote qué técnicas podemos implementar para reconocer cuando la relación **NO** es función.

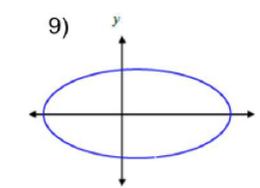
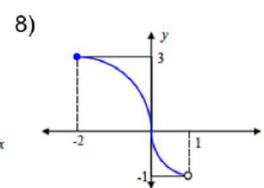
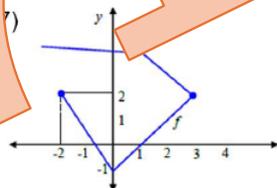
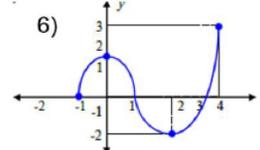
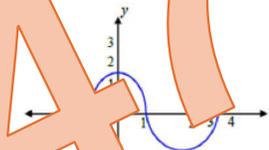
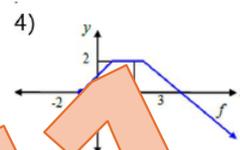
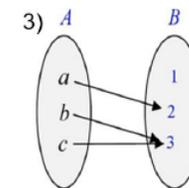
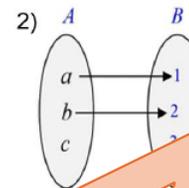
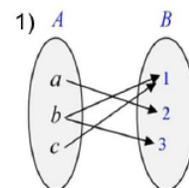
x	1	2	1	3
y	3	5	4	6



$g: \{-4, 1, 9\} \rightarrow \{-2, 1, 3\}$  con  $g(x) = \sqrt{x}$

$G_g = \{(2, 7), (-2, 7), (0, 6), (-2, 8), (4, 3)\}$

**ACTIVIDAD #1:** Determine cuál de las siguientes relaciones corresponde a una función matemática. Justifique su respuesta.



10)

X	5	9	7	8	0
Y	3	6	9	8	-2

11)

X	-5	-9	-5	9	4
Y	1	3	5	7	9

12)

X	f(x)
1	0
3	0
5	0
7	0
9	0

13)  $G_f = \{(1, 2), (4, 5), (5, 4), (-1, 9)\}$

14)  $G_f = \{(4, 5), (-4, 7), (7, 4), (7, 0)\}$

15)  $G_f = \{(1, 8), (1, 6), (1, 5), (1, 3)\}$

16)  $G_f = \{(-10, 7), (-5, 7), (0, 7), (5, 7)\}$

**ACTIVIDAD #2:** Para cada una de las siguientes relaciones algebraicas, indique si la misma es o no función. En caso de no serlo, justifique la respuesta.

1)  $f(x) = x + 6$ , con  $f: \{2, 4, 6\} \rightarrow \{6, 8, 10, 12, 14\}$       2)  $h(x) = 4x$ , con  $h: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{3, 6, 9, 12\}$

3)  $f(x) = x - 7$ , con  $f: \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}$

4)  $g(x) = \frac{x}{3}$ , con  $g: \{12, 15, 18\} \rightarrow \{3, 4, 5, 6\}$

5)  $f(x) = x + 10$ , con  $f: \{3, 5, 7\} \rightarrow \{30, 50, 70\}$

6)  $g(x) = 2x + 5$ , con  $g: \{0, 5\} \rightarrow \{5, 15\}$

7)  $k(x) = \sqrt{x}$ , con  $k: \{1, 4, 9\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$

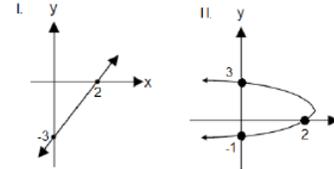
8)  $g(x) = x^2$ , con  $g: \{7, 9\} \rightarrow \{14, 18\}$

60147

TRABAJO COTIDIANO – Concepto de Función	Valoración
Identifica si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.	

### EJERCICIOS ADICIONALES

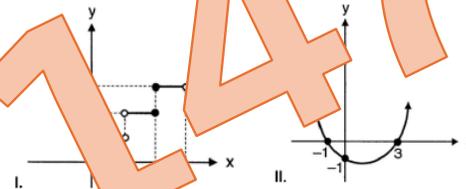
1) Considere las siguientes representaciones gráficas:



De ellas, ¿cuál o cuáles corresponden a una función?

- A) Ambas.      B) Ninguna.  
C) Solo la I.      D) Solo la II.

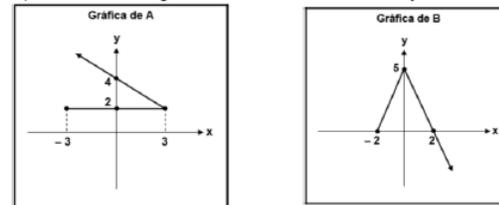
2) Considere las siguientes representaciones gráficas:



De ellas, ¿cuál o cuáles pueden corresponder a la representación gráfica de una función?

- A) Ambas      B) Ninguna  
C) Solo la I      D) Solo la II

3) Considere las gráficas de las relaciones A y B



De acuerdo con la información anterior, ¿cuál o cuáles representaciones gráficas corresponden a una función?

- A) Ambas      B) Ninguna  
C) Solo la I      D) Solo la II



4) Considere las siguientes representaciones tabulares:

I.

x	1	1	1	1
f(x)	4	5	6	7

II.

x	2	3	4	5
g(x)	8	8	8	8

De ellas, ¿cuál o cuáles pueden corresponder a la representación tabular de una función?

- A) Ambas                      B) Ninguna  
C) Solo la I                    D) Solo la II

5) Considere las siguientes relaciones:

I.  $G_f = \{(4, 7), (-5, 0), (6, 0), (4, 8)\}$

II.  $G_h = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (6, 3)\}$

De ellas, ¿cuál o cuáles corresponden a una función?

- A) Ambas                      B) Ninguna  
C) Solo la I                    D) Solo la II

6) Considere las siguientes tablas de valores de dos relaciones:

Relación 1		Relación 2	
x	y	x	y
2	a	1	5
3	15	3	5
4	20	3	15
5	25	5	20

De acuerdo con la información anterior; considere las siguientes proposiciones:

- I. Si la Relación 1 es una función, entonces, "a" no puede ser 15.  
II. La Relación 2 no representa una función.

De ellas, ¿cuál o cuáles son, con certeza verdaderas?

- A) Ambas                      B) Ninguna  
C) Solo la I                    D) Solo la II



7) Considere las siguientes relaciones:

I.

x	-2	0	1	4
f(x)	0	-2	-1	2

II.  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $g(x) = 3x - 4$

De ellas, ¿cuál o cuáles corresponden a una función?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

8) Considere las siguientes relaciones simbólicas:

I.  $f(x) = x - 1, \text{ con } f: \{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$

II.  $g(x) = \sqrt{x}, \text{ con } g: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$

De ellas, ¿cuál o cuáles corresponden a una función?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

9) Considere las siguientes proposiciones referentes a las relaciones T y M:

I. Sea  $A = \{2, 5\}$  y  $B = \{3, 6\}$ , y T la relación de A en B determinada por  $T(x) = x + 1$

II. Sea  $D = \{0, 2\}$  y  $E = \{0, 6\}$ , y M la relación de D en E determinada por  $M(x) = x^2$ .

De ellas, ¿cuál o cuáles pueden representar a una función?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

10) Considere las siguientes representaciones simbólicas:

I.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \frac{x+4}{3}$                       II.  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 5x - 18$

De ellas, ¿cuál o cuáles corresponden a una función?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II



## ANÁLISIS DE FUNCIONES

### HABILIDADES:

- Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.
- Analizar una función a partir de sus representaciones.

### REPRESENTACIONES ALGEBRAICAS: IMAGEN Y PREIMAGEN

La ecuación  $y = 3x - 7$  describe la función  $f(x) = 3x - 7$ . Por lo tanto,  $f(x) = y$ .

### CÁLCULO DE IMÁGENES:

Para calcular la imagen de una función se sustituye la preimagen  $x$  en el criterio de la función.

**NOTA:** Es lo mismo decir "determine la imagen de 8" que decir "determine  $f(8)$ ". Son dos maneras distintas de solicitar el cálculo de la imagen.

1) Sea  $f(x) = 4x - 9$ , calcule la imagen de 5.



2) Sea  $g(x) = x^2 - 10$ , hallar  $g(4)$ .

El "truco" con calculadora CASIO podría ser útil para funciones cuadráticas e de calcular varias imágenes.

3) Sea  $k(x) = 2x^2 - 3x - 10$ , calcule  $k(-3)$ ,  $k(0)$  y  $k(5)$ .

### CÁLCULO DE PREIMÁGENES:

Para calcular la preimagen de una función se sustituye la imagen "y" en el criterio de la función a la imagen "y" y se resuelve la ecuación. La solución será la preimagen buscada.

Para la función  $h(x) = 9x - 4$ , calcule la preimagen de -32.



Calcule la preimagen de -6 en la función  $f(x) = \frac{x+5}{2}$ .

## REPRESENTACIONES TABULARES: IMÁGENES Y PREIMÁGENES

Debemos aprender a analizar las imágenes y preimágenes en funciones cuando están representadas en notación tabular.

**Ejemplo #1:** Con la guía del docente, conteste el siguiente ejercicio.

X	-5	-3	0	2	3	4	6	8
Y	0	1	3	4	5	6	8	10



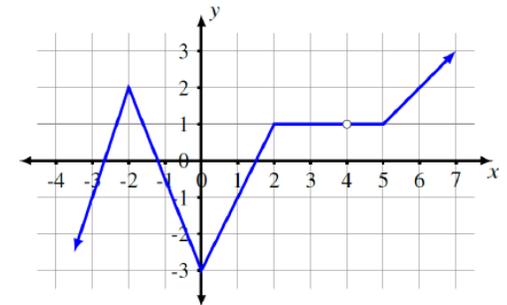
- La preimagen de 10 es \_\_\_\_\_.
- La imagen de -3 es \_\_\_\_\_.
- La imagen de 8 es \_\_\_\_\_.
- La preimagen de 3 es \_\_\_\_\_.
- ¿Es imagen de 10 el R/ \_\_\_\_\_.

## REPRESENTACIONES GRÁFICAS: IMÁGENES Y PREIMÁGENES

Almente, debemos aprender a analizar las imágenes y preimágenes en funciones que están representadas en notación gráfica.

**Ejemplo #2:** Con la guía del docente, conteste el siguiente ejercicio basándose en la representación gráfica a continuación.

- $f(-3) =$  \_\_\_\_\_.
- ¿Imagen de -2? \_\_\_\_\_.
- ¿Preimagen de -3? \_\_\_\_\_.
- ¿Es 3 una preimagen de 1?



**ANÁLISIS GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN**

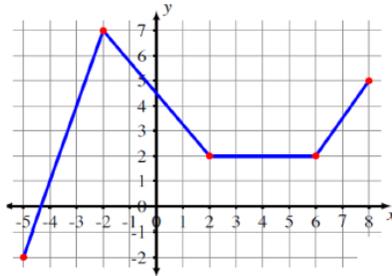
Desde una representación gráfica, podemos determinar su dominio, ámbito o rango y sus intervalos de monotonía.

**Dominio:** son todas las preimágenes en la gráfica. Se determina de izquierda a derecha (eje x).

$D_f =$  \_\_\_\_\_.

**Ámbito o Rango:** son todas las imágenes, en la gráfica se determina de abajo hacia arriba (eje y).

$A_f =$  \_\_\_\_\_.



**Intervalos de monotonía:** son los subconjuntos donde la función es creciente, decreciente o constante. Se determina de izquierda a derecha (eje x).

Creciente: \_\_\_\_\_ Decreciente: \_\_\_\_\_ Constante: \_\_\_\_\_



**Ejemplo #3:** Analice la siguiente gráfica de la función "f" y determine:

Dominio: \_\_\_\_\_

Ámbito: \_\_\_\_\_

Creciente: \_\_\_\_\_

Decreciente: \_\_\_\_\_

Constante: \_\_\_\_\_

Ceros: \_\_\_\_\_

Imagen de 0: \_\_\_\_\_

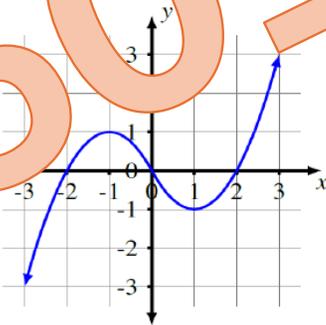
Preimagen de 1: \_\_\_\_\_

Anote F para falso o V para verdadero.

$f(-2) = 0$  ( )  $f(-1) > 2$  ( )

$f(-2) = f(2)$  ( )  $f(-3) < f(1)$  ( )

La función h es decreciente en  $]0,1[$  ( )



**Ejemplo #4:**

La siguiente representación gráfica, la cual corresponde a la velocidad (rapidez), en metros por minuto, a la que viaja un automóvil durante un trayecto, en función del tiempo, en minutos, luego de haber iniciado el viaje.

Defina los intervalos donde:

a) El vehículo aumenta de velocidad (creciente):

\_\_\_\_\_.

b) El vehículo disminuye la velocidad (decreciente):

\_\_\_\_\_.

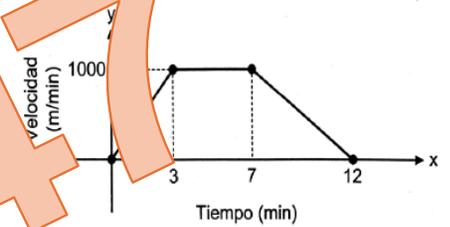
c) El vehículo mantiene su velocidad (constante):

\_\_\_\_\_.

d) En cuál minuto, la velocidad es de 1000 m/min?

\_\_\_\_\_.

e) ¿Qué velocidad llevaba el automóvil a los 12 minutos? \_\_\_\_\_.



**Ejemplo #5:**

Un grupo de venados es llevado a una isla en el año 1990. Al inicio la cantidad de venados aumentó rápidamente, pero luego los recursos se fueron agotando y esta disminuyó. Si la cantidad  $C(x)$  de venados que hubo en esa isla, a los "x" años de haber sido llevados está dada por  $C(x) = -x^4 + 21x^2 + 100$ , con  $0 \leq x < 5$  entonces, ¿Cuál fue la cantidad de venados que hubo en esa isla en el año 1993?



**ACTIVIDAD #1:** Responda lo que se solicita en cada parte.

A) De acuerdo con la función  $f$ , anote F para falso o V para verdadero.

El dominio de  $f$  es  $[0,6]$  ( )

$f$  es decreciente en todo su dominio ( )

La imagen de 4 es 2 ( )

La preimagen de 0 es 6 ( )

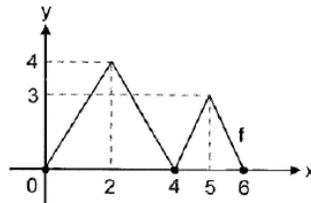
La función es creciente en  $]4,5[$  ( )

El punto  $(5,3)$  pertenece a  $f$  ( )

Un cero de  $f$  es  $x = 2$  ( )

$f(2) = f(5)$  ( )       $f(4) > f(0)$  ( )

$f(5) < f(2)$  ( )      El rango de  $f$  es  $[0,3]$  ( )



B) Una persona que desea iniciar su nuevo negocio realizó una publicación en su muro de Facebook y quiso registrar la cantidad de veces que se compartió durante la primera semana. Se toma como día 1 el lunes hasta el día 7 domingo. Marque con X aquellas proposiciones que son VERDADERAS.

a) El viernes se compartió 9 veces.

b) Se compartió la misma cantidad de veces el lunes y el domingo.

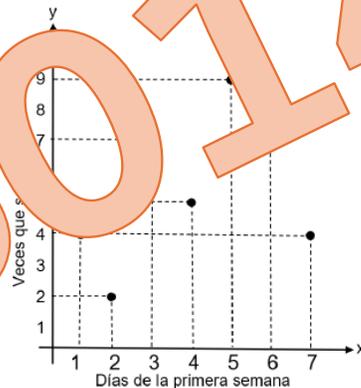
c) El miércoles se compartió menos veces que el sábado.

d) El día que se compartió 7 veces fue el jueves.

e) Se experimentó un crecimiento de jueves a miércoles.

f) Se experimentó un decrecimiento de sábado a domingo.

g) El ámbito de la función corresponde a  $\{2,4,5,7,9\}$ .



C) La siguiente representación gráfica corresponde a la cantidad de agua potable, en metros cúbicos, que se consumió en una institución en función del tiempo "x", en horas de un día, con  $6 < x \leq 16$ :

1) ¿Entre cuales horas se dio una disminución en el consumo de agua?

- ( ) 6h y 8h
- ( ) 8h y 10h
- ( ) 10h y 12h

2) ¿Entre cuales horas se dio un aumento en el consumo de agua?

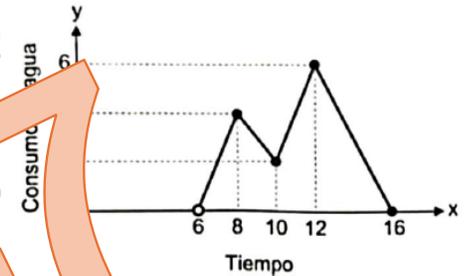
- ( ) 8h y 10h
- ( ) 10h y 12h
- ( ) 12h y 15h

3) ¿A que hora de ese día se consumió la mayor cantidad de agua en esa institución?

- ( ) A las 6h
- ( ) A las 12h
- ( ) A las 15h

4) ¿Cuántos metros cúbicos de agua se consumió a las 10 h?

- ( ) 2
- ( ) 4
- ( ) 6



**ACTIVIDAD #2:** Resuelva los siguientes problemas.

a) La temperatura " $T(x)$ " en grados Celsius que experimentó un tipo de planta en un laboratorio está dada por  $T(x) = (x - 4)^2$  donde "x" representó el tiempo, en horas, que transcurrió a partir de la exposición de la planta a una fuente de energía calórica, con  $0 < x \leq 8$ . De acuerdo con la información anterior, ¿cuál fue la temperatura que esa planta experimentó a las 5h, luego de haber sido expuesta a esa fuente calórica?

b) En un experimento científico se determina que la cantidad aproximada "n(x)" de bacterias, está dada por  $n(x) = 1000\sqrt{x+3}$ , donde "x" representa el tiempo, en horas, transcurrido desde que inició ese experimento con  $0 < x \leq 10$ .

b.1 ¿Cuál es la cantidad de bacterias al transcurrir 3 horas?

b.2 ¿Y al transcurrir 7 horas?

c) Una empresa estima que el valor monetario "V", en dólares que tiene una máquina luego de "x" años de comprada está dado por  $V(x) = 10000 - 250x$ , donde "x" corresponde a la cantidad de años desde que la empresa adquirió esa máquina con  $0 < x \leq 10$ .

c.1. ¿Cuál es el valor inicial de la máquina?

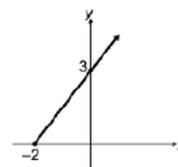
c.2 ¿Cuál es el valor de la máquina al pasar 4 años?

d) La rapidez "R" en kilómetros por hora, a la que viajó un automóvil luego de "x" minutos de haber iniciado un recorrido, está dada por  $R(x) = x^3 + 50$ , con  $1 \leq x \leq 5$ . De acuerdo con la información anterior, ¿Cuál fue la rapidez del automóvil, en kilómetros por hora, luego de 4min de haber iniciado ese recorrido?

TRABAJO COTIDIANO – Análisis de Funciones	Valoración
Analiza funciones matemáticas a partir de su representación gráfica.	
Analiza funciones matemáticas a partir de su representación algebraica.	
Evalúa el valor de una función dada en forma algebraica en distintos puntos de su dominio.	

### EJERCICIOS ADICIONALES

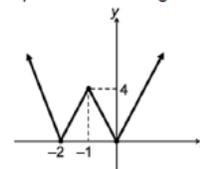
1) Considere la siguiente representación gráfica de una función f,



El ámbito de f corresponde a

- A)  $[0, 3[$       B)  $] -2, 3]$   
 C)  $[0, +\infty[$       D)  $] -2, +\infty[$

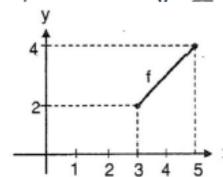
2) Considere la siguiente representación gráfica de una función f,



Un intervalo en el cual el comportamiento de f es creciente corresponde a

- A)  $] 0, +\infty[$       B)  $] -\infty, 0[$   
 C)  $] -2, +\infty[$       D)  $] -\infty, -2[$

3) Considere la siguiente representación gráfica de una función f.



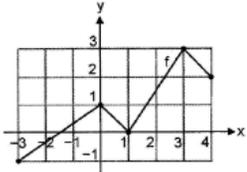
Analice las siguientes proposiciones:

- I. El dominio de la función corresponde al intervalo  $[2, 4]$ .  
 II. La preimagen de 2 es 3.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas      B) Ninguna  
 C) Solo la I      D) Solo la II

4) Considere la siguiente representación gráfica de la función  $f$ :



Un intervalo donde la función es decreciente corresponde a

- A)  $]-2, 1[$       B)  $]0, 1[$   
 C)  $]0, 2[$       D)  $]1, 3[$

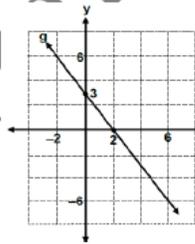
5) Considere la siguiente representación gráfica de una función  $g$ .

Analice las siguientes proposiciones:

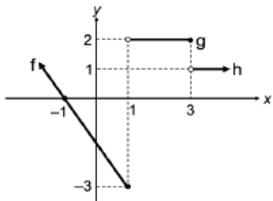
- I. El valor de 3 es imagen de 0.  
 II. La función es decreciente en todo su dominio.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas      B) Ninguna  
 C) Solo la I      D) Solo la II



6) Considere la siguiente representación gráfica de las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$ .



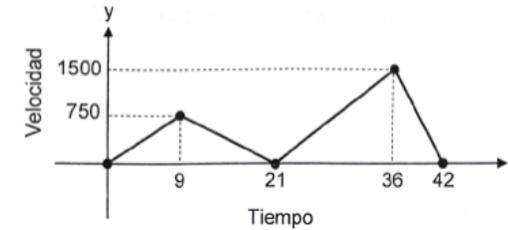
Analice las siguientes proposiciones:

- I. La función  $f$  es creciente.  
 II. Se cumple que  $g(3) = g(2)$

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas      B) Ninguna  
 C) Solo la I      D) Solo la II

Para responder los ítems 7, 8 y 9 considere la siguiente representación gráfica, la cual corresponde a la velocidad (rapidez), en metros por minuto, a la que viaja un automóvil, en función del tiempo, en minutos, luego de haber iniciado ese viaje, con  $0 \leq x \leq 42$ :



7) Luego de iniciado el viaje, el vehículo aumenta la velocidad (rapidez) entre los minutos

- A) 10 y 14  
 B) 22 y 26  
 C) 37 y 41



8) Luego de iniciado el viaje, el vehículo disminuye la velocidad (rapidez) entre los minutos

- A) 3 y 7  
 B) 24 y 29  
 C) 37 y 41



9) ¿En cuál minuto, luego de haber iniciado el viaje, el automóvil alcanza la máxima velocidad (rapidez)?

- A) 9  
 B) 36  
 C) 42



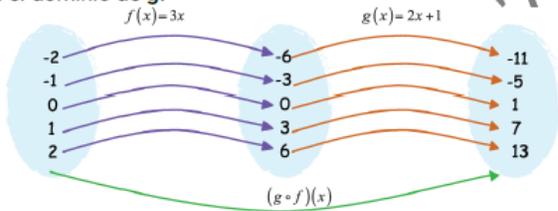
**HABILIDAD:**

-Calcular la composición de dos funciones.

**COMPOSICIÓN DE FUNCIONES**

Dadas dos funciones  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$ , llamaremos composición de  $f$  y  $g$ , a una nueva función  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  para todo  $x \in A$ .

Aquí tenemos dos funciones  $f(x) = 3x$  y  $g(x) = 2x + 1$ , donde según los diagramas adjuntos se evidencia la composición de funciones  $(g \circ f)(x)$ . Nótese que el ámbito de  $f$  coincide con el dominio de  $g$ .



**Ejemplo 1:** Sea  $f(x) = 3x$  y  $g(x) = 2x + 1$ , determine la composición  $(g \circ f)(x)$ .



**Ejemplo 2:**

Para las funciones  $f(x) = 3x - 1$  y  $h(x) = x + 5$ , determine  $(f \circ h)(x)$  y  $(h \circ f)(x)$



**Ejemplo 3:** Para las funciones  $f(x) = x^2 - 6$  y  $m(x) = x - 2$ , determine  $(f \circ m)(2)$  y  $(m \circ f)(-5)$ .



**ACTIVIDAD #1: Determine lo que se solicita en cada caso.**

1) Sea $f(x) = x + 3$ y $m(x) = 4x$ , determine:	
$(f \circ m)(x)$	$(m \circ f)(x)$
2) Sea $f(x) = x - 8$ y $g(x) = 2x$ , determine:	
$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
3) Sea $h(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x + 3$ , determine:	
$(h \circ g)(x)$	$(g \circ h)(x)$

4) Sea $f(x) = 7x + 3$ y $n(x) = x - 6$ , determine:	
$(f \circ n)(x)$	$(n \circ f)(x)$
5) Sea $f(x) = 7x - 8$ y $n(x) = x + 2$ , determine:	
$(n \circ f)(x)$	$(f \circ n)(4)$
6) Sea $g(x) = x - 5$ y $m(x) = 3x$ , determine:	
$(g \circ m)(1)$	$(m \circ g)(-2)$

TRABAJO COTIDIANO – Composición de Funciones	Valoración
Calcula la composición de dos funciones en distintos contextos	

**EJERCICIOS ADICIONALES**

1) Considere los siguientes criterios de funciones:  $f(x) = 5x - 4$ ,  $g(x) = 3x - 7$ . De acuerdo con la información anterior ¿cuál es el criterio de la función  $(g \circ f)$ ?

- A)  $(g \circ f)(x) = 15x + 5$
- B)  $(g \circ f)(x) = 15x - 11$
- C)  $(g \circ f)(x) = 15x + 19$
- D)  $(g \circ f)(x) = 15x - 19$



2) En una clase la docente les indica a los estudiantes que  $g$  es una función que a cada número real le asigna el resultado de restar el 7 a ese mismo número. Además, se les indica que  $f$  es otra función que a cada número real le asigna el resultado de sumarle 9 al doble de ese número. Los estudiantes escriben los respectivos criterios de  $f$  y  $g$  como se muestra a continuación:

$$g(x) = x - 7$$

$$f(x) = 2x + 9$$

De acuerdo con la información anterior; considere las siguientes proposiciones:

- I.  $(f \circ g)(2) = -1$
- II.  $(g \circ f)(x) = 2x - 2$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II



3) Considere los siguientes criterios de las funciones  $f$  y  $g$ :

$$f(x) = 2x + 8$$

$$g(x) = \frac{x + 6}{2}$$

De acuerdo con la información anterior, ¿Cuál es el criterio de  $(g \circ f)$ ?

- A)  $(g \circ f)(x) = x + 3$
- B)  $(g \circ f)(x) = x + 4$
- C)  $(g \circ f)(x) = x + 7$
- D)  $(g \circ f)(x) = x + 14$



4) Considere los siguientes criterios de las funciones  $f$  y  $g$ .

$$f(x) = x - 2 \quad g(x) = 4 - 3x$$

De acuerdo con lo anterior, ¿cuál es el criterio de  $(g \circ f)$ ?

- A)  $(g \circ f)(x) = 2 - 3x$
- B)  $(g \circ f)(x) = 6 - 3x$
- C)  $(g \circ f)(x) = 10 - 3x$
- D)  $(g \circ f)(x) = -2 - 3x$



5) Considere las siguientes proposiciones referentes a las funciones  $f$  y  $g$  dadas por

$$f(x) = 5x + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x - 3}{5}$$

- I.  $(g \circ f)(x) = x$
- II.  $(g \circ f)(5) = 5$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II



6) Considere la siguiente información referida a las funciones  $f$  y  $g$ :

$$\text{Sea } f(x) = x^2 + 1 \text{ con dominio } \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } g(x) = x - 1 \text{ con dominio } \{2, 5, 10, 17\}.$$

De acuerdo con la información anterior, al realizar una composición de  $g$  y  $f$  se obtiene

- A)  $(g \circ f)(x) = x^2$
- B)  $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$
- C)  $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$
- D)  $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 2$



**HABILIDADES:**

- Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.

**ACTIVIDAD DE INICIO:**

Los costos totales que tiene una empresa que se dedica a la fabricación de zapatos de cierto tipo son de €6000 por cada par y €10000 por costos fijos, sin importar la cantidad de zapatos que se fabriquen. ¿Cuál sería el costo total de fabricar 10 pares de zapatos?

**FUNCIÓN LINEAL**

Una función lineal es una función polinómica de primer grado, cuya representación en el plano cartesiano es una recta.

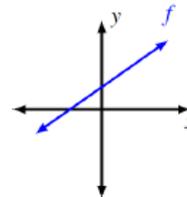
Es una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo criterio es  $f(x) = mx + b$ , donde  $m, b \in \mathbb{R}$ . A la "m" se le llama **pendiente** que indica el grado de inclinación de la recta respecto al eje x. El valor de "b" es la **intersección** con el eje y.



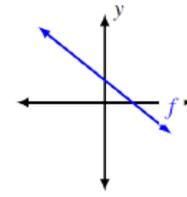
Ejemplos de funciones lineales: \_\_\_\_\_.

**Representación gráfica de la función lineal:**

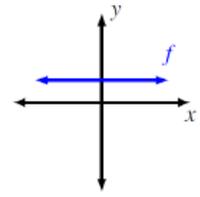
Función estrictamente creciente  $m > 0$



Función estrictamente decreciente  $m < 0$



Función lineal constante  $m = 0$



**EJEMPLO #1:** Para cada función lineal, indique el valor de su pendiente, intersección y si es creciente, decreciente o constante.

$f(x) = 5x + \frac{9}{2}$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$        $\underline{\hspace{2cm}}$

$k(x) = 8$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$        $\underline{\hspace{2cm}}$

$g(x) = -4x + 1$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$        $\underline{\hspace{2cm}}$

$b(x) = 9 - x$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$        $\underline{\hspace{2cm}}$

$h(x) = \frac{-4x}{5}$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$        $\underline{\hspace{2cm}}$

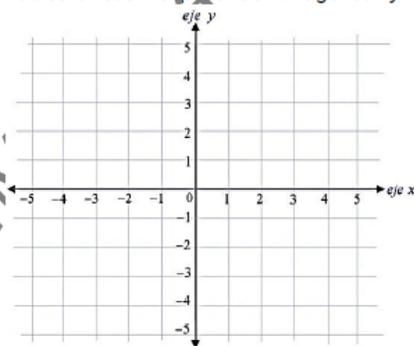
$m(x) = \frac{3+x}{5}$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$        $\underline{\hspace{2cm}}$



**EJEMPLO #2:** Para cada función lineal, calcule sus respectivas imágenes y representela gráficamente.

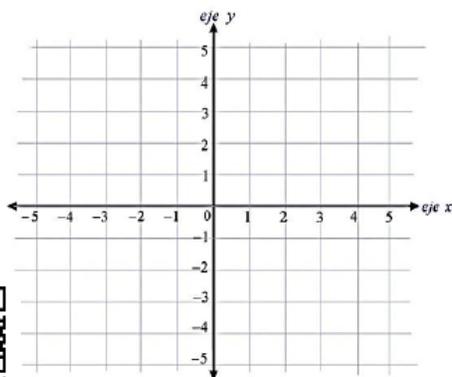
a) Si la función es  $f(x) = 2x + 1$

x	-2	-1	0	1
f(x)				



b) Si la función es  $h(x) = 4 - 3x$

x	0	1	2
h(x)			



**ACTIVIDAD #1:** Nuevamente, para cada función lineal indique el valor de su pendiente, intersección y si es creciente, decreciente o constante.

$h(x) = 2 - 6x$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$       Monotonía:  $\underline{\hspace{2cm}}$

$m(x) = 25x - 500$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$       Monotonía:  $\underline{\hspace{2cm}}$

$g(x) = 15x$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$       Monotonía:  $\underline{\hspace{2cm}}$

$f(x) = -4$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$       Monotonía:  $\underline{\hspace{2cm}}$

$n(x) = -x + 100$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$       Monotonía:  $\underline{\hspace{2cm}}$

$k(x) = \frac{3+5x}{2}$        $m = \underline{\hspace{2cm}}$        $b = \underline{\hspace{2cm}}$       Monotonía:  $\underline{\hspace{2cm}}$

**ACTIVIDAD #2:** Para cada una de las funciones lineales presentadas a continuación, complete su tabla y representela en el plano cartesiano.

a) Si la función es  $f(x) = 3x - 5$

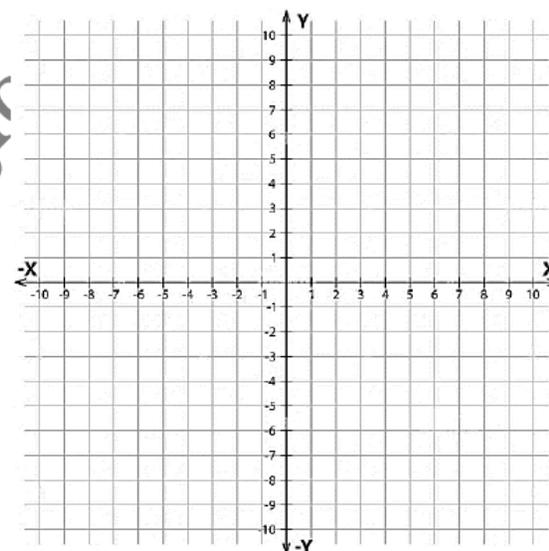
x	1	2	3	4
f(x)				

b) Si la función es  $h(x) = -2x$

x	-2	-1	0	1
h(x)				

c) Si la función es  $k(x) = -7$

x	-4	-1	2	5
k(x)				



### INTERSECCIÓN CON LOS EJES

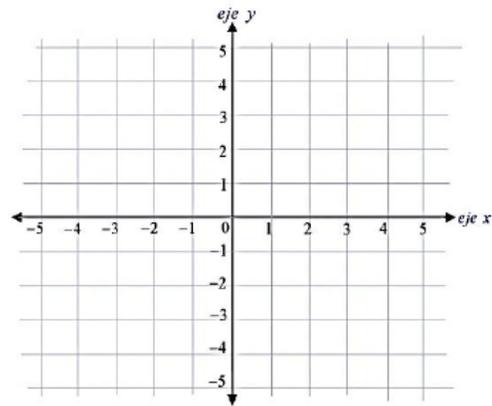
En una función lineal, si conocemos los valores de  $m$  y  $b$ , es posible determinar sus puntos de intersección:

Intersección con el eje  $x$  (eje de las abscisas), se determina por el par ordenado

$$\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$$

Intersección con el eje  $y$  (eje de las ordenadas), se determina por el par ordenado  $(0, b)$

¿Cuáles son los puntos de intersección con el eje  $x$  y el eje  $y$  de la función  $g(x) = -4x + 3$ ?



Adicional: ¿Cuáles serían los puntos de intersección en "x" y "y" de  $f(x) = \frac{2x}{3} - 9$ ?

ACTIVIDAD #3: Complete el cuadro con lo que se solicita.

FUNCIÓN LINEAL	Valor de "m"	Valor de "b"	Intersección con el eje X	Intersección con el eje Y
$f(x) = 3x - 6$				
$g(x) = x + 8$				
$h(x) = 4$				
$k(x) = \frac{3x - 2}{5}$				
$m(x) = 5x$				

### CÁLCULO DE IMAGEN Y PREIMAGEN DE UNA FUNCIÓN LINEAL

No debemos olvidar que para cualquier tipo de función podemos calcular una imagen o preimagen, usando los procedimientos vistos anteriormente. Lo recordamos con el siguiente ejemplo:

Para la función lineal  $k(x) = 5x + 8$ :

A) Calcule la imagen de  $-4$

b) Calcule la preimagen de  $2$



### ECUACIÓN DE LA RECTA

Para determinar la gráfica de una función lineal (una recta) es suficiente tener 2 puntos que pertenecen a esta gráfica, ya que 2 puntos distintos en un plano determinan una única recta.

Si  $P(x_1, y_1)$  y  $Q(x_2, y_2)$  son puntos distintos de la gráfica de una función lineal, como se muestra en la figura 1. La pendiente "m" de la recta está determinada por la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y para obtener el valor de la intersección "b", partiendo de  $y = mx + b$ , despejamos b y obtenemos:  $b = y - mx$

Así, con "m" y "b" ya calculados, completamos la expresión  $f(x) = mx + b$ .

**EJEMPLOS #1:** Guiado por el docente, responda los siguientes ejercicios.

A) Determine la ecuación de una recta que pasa por los puntos (2,1) y (3,6).

B) ¿Cuál es el criterio de una función lineal f donde  $f(-3) = 5$  y  $f(2) = -4$ ?

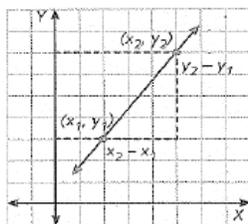
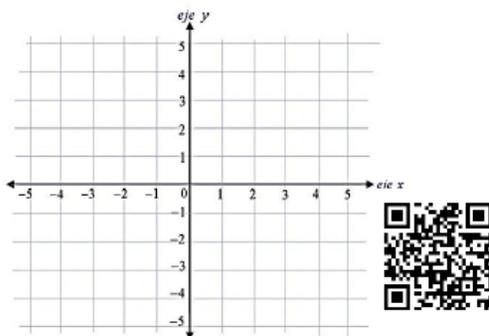
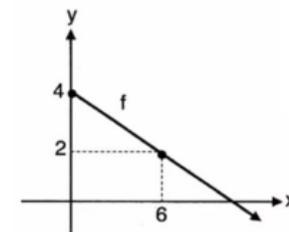


Figura 1

C) ¿Cuál es el criterio de la función lineal representada por f?



**ACTIVIDAD #4.** Resuelva lo que se solicita en cada caso.

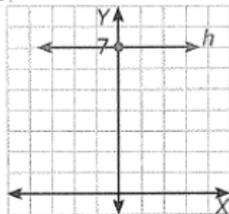
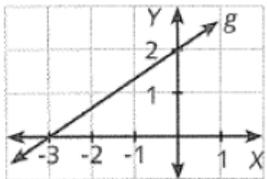
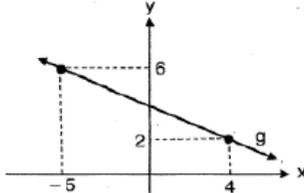
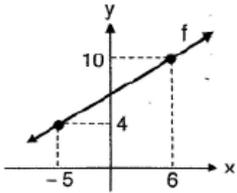
1) Determine la ecuación de la recta dados dos puntos de ella, en cada caso.

- a) (3,1) y (6,0)
- c) (-10,-5) y (-4,-8)

- b) (2,-2) y (3,-7)

- d) (0,4) y (-3,10)

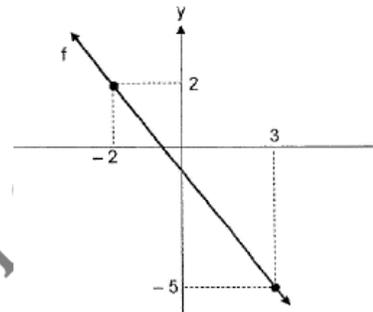
2) Determine la ecuación de la recta según la representación gráfica dada en cada caso.



**ACTIVIDAD #5:** Considere la siguiente representación gráfica de una función  $f$ .

De acuerdo con la gráfica, conteste lo siguiente:

- ¿Cuál es el criterio (fórmula) de esa función  $f$ ?
- Determine la intersección de la gráfica de  $f$  con el eje de las ordenadas.
- Determine la intersección de la gráfica de  $f$  con el eje de las abscisas.
- Determine la imagen de 2.



TRABAJO COTIDIANO – Función Lineal	Valoración
Representa gráficamente una función lineal.	
Determina la pendiente, la intersección y su monotonía de una recta dada en forma algebraica.	
Determina la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada en forma algebraica.	
Determina la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.	

**EJERCICIOS ADICIONALES**

1) Considere las siguientes proposiciones referentes a la función **h** dada por  $h(x) = -8 + 4x$ :

I. La intersección con el eje de las abscisas es (8,0).

II. La pendiente es 4.

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

- A) Ambas.
- B) Ninguna.
- C) Solo la I.
- D) Solo la II.



2) ¿Cuál es la intersección de la gráfica de la función **f** dada por  $f(x) = -6 + 2x$  con el eje de las abscisas (eje **x**)?

- A) (3, 0)
- B) (2, 0)
- C) (-6, 0)



3) Sea la función "**r**" cuya gráfica está dada por la recta  $y = -2$ . ¿Cuál de las siguientes opciones contiene una afirmación correcta referida a "**r**"?

- A) La pendiente es 0.
- B) (0, 0) pertenece a **r**.
- C) La gráfica de "**r**" interseca el eje "**x**" en un solo punto.



4) Sea **f** una función lineal tal que la pendiente de su gráfica es -2. Si (3, 1) pertenece a su gráfico, entonces, la gráfica de **f** interseca al eje de las ordenadas (eje **y**) en

- A) (0, 7)
- B) (0, 5)
- C) (0, -8)



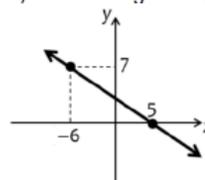
5) La intersección con el eje de las abscisas (eje **x**) de una función **f** dada por  $f(x) = \frac{2x}{3} + 1$

corresponde a

- A)  $(-\frac{3}{2}, 0)$
- B)  $(\frac{2}{3}, 0)$
- C) (1,0)



6) Analice la siguiente gráfica de la función lineal **f**:



Considere las siguientes proposiciones:

- I. La pendiente de la función lineal es igual a  $\frac{7}{11}$ .
- II. La intersección con el eje de las ordenadas es el punto  $(0, \frac{35}{11})$ .

De ellas, ¿cuál o cuáles son **verdaderas**?

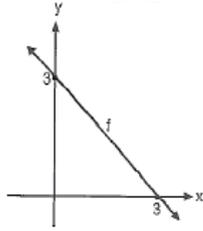
- A) Ambas.
- B) Ninguna.
- C) Solo la I.
- D) Solo la II.

7) ¿Cuál es el criterio de una función lineal que pasa por los puntos (-4,3) y (4,6)?

- A)  $y = \frac{x}{8} + \frac{9}{8}$
- B)  $y = \frac{3x}{8} + \frac{9}{8}$
- C)  $y = \frac{3x}{2} + 18$
- D)  $y = \frac{3x}{8} + \frac{9}{2}$



8) Considere la siguiente gráfica de una función f:



El criterio de f corresponde a  $f(x) =$  \_\_\_\_\_

- A)  $x + 3$
- B)  $-x + 3$
- C)  $-3x + 3$

9) Considere la siguiente representación tabular de una función lineal h:

x	1	3	5	7
h(x)	10	5	0	-5

Considere las siguientes proposiciones:

- I. El criterio de función es  $h(x) = \frac{5x + 25}{2}$
- II. La gráfica de h interseca al eje de las ordenadas en (0,5).



De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas.
- B) Ninguna.
- C) Solo la I.
- D) Solo la II.

10) Considere las siguientes proposiciones referentes a la función f dada por  $f(x) = 9 - 3x$ .

- I. El valor de la pendiente es 9.
- II. f interseca al eje "x" en (3,0).



De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la
- D) Solo la II

11) Considere las siguientes proposiciones referentes a la función h dada por  $h(x) = 4x + 7$ :

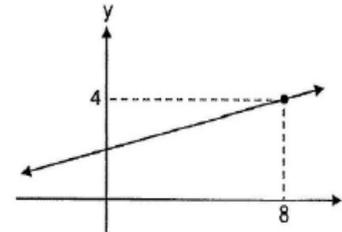
- I. La intersección con el eje de las abscisas corresponde al punto  $(-\frac{7}{4}, 0)$
- II. La intersección con el eje de las ordenadas corresponde al punto (0, -7)

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la
- D) Solo la II



12) Considere las siguientes afirmaciones sobre la gráfica de la recta  $y = mx + 2$ :



- I. La recta interseca el eje y en (0, 2).
- II. El valor de la pendiente es mayor que 1.

De ellas son verdaderas:

- A) ambas.
- B) solo la I.
- C) solo la II.



13) Considere las siguientes proposiciones sobre la función  $y = -x$ :

- I. La gráfica de "g" es creciente.
- II. La gráfica de "g" contiene el origen de coordenadas.

De ellas son verdaderas:

- A) ninguna.
- B) solo la I.
- C) solo la II.



**HABILIDAD:**

Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.

**PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON FUNCIONES LINEALES**

Se van a estudiar las distintas maneras de resolver un problema que involucre una función lineal, para lo cual debemos considerar:

- a) Cálculo de imagen o preimagen para resolver la situación. Esto podría darse cuando tenemos ya el criterio.
- b) Costos fijos y variables: es una situación muy común para determinar fácilmente el criterio de la función lineal.
- c) Usando las fórmulas de  $m$  y  $b$ , o la calculadora CASIO para determinar el criterio teniendo la información directa o indirecta de dos puntos de la recta.

Veamos algunas de esas situaciones a continuación.

**Ejemplos: Resuelva los siguientes problemas.**

1) Un parquímetro es un dispositivo que utilizan algunas municipalidades para cobrar dinero, a cambio del derecho de estacionar un vehículo en la vía pública por una determinada cantidad de tiempo. Para establecer la tarifa "T(m)", en colones, por estacionar un vehículo, una municipalidad emplea el modelo  $T(m) = 10m + 200$ , donde "m" es el tiempo, en minutos, que permanece el vehículo estacionado.

1.1) ¿Cuál es la tarifa al estacionar el vehículo por 3 horas?



1.2) Si la tarifa fue de 1100 colones, ¿Cuánto tiempo estuvo estacionado?

1.3) Un cliente estacionó por dos horas y media. Al pagar lo hizo con un billete de 5000 colones, ¿Cuánto recibió de cambio?

2) Una máquina empastadora de libros consume inicialmente 50 kwh (kilowatts hora) para ser encendida y por cada libro terminado consume 3 kwh adicionales. Determine la ecuación que permite establecer el consumo de kilowatts hora de la máquina.



3) Un restaurante tiene un costo fijo de ₡75000 al mes y cada plato que sirve le cuesta ₡3500. Si en cierto mes, el costo total fue de ₡145000, ¿Cuántos platos se vendieron?



4) La cantidad "C(x)" de chirridos (sonidos) por minuto que emite un grillo de cierta especie, está dada por  $C(x) = 4x - 160$ , donde "x" representa la temperatura, en grados Fahrenheit, que hay en cierto momento en un bosque tropical con  $60 \leq x \leq 86$

4.1) ¿Cuál es la temperatura, en grados Fahrenheit, en ese bosque tropical, si en un minuto un grillo de esa especie emite 124 chirridos?



4.2) ¿Cuál es la cantidad de chirridos por minuto que emite un grillo si en cierto momento se está a una temperatura de 62 grados Fahrenheit?



5) En un experimento sobre el crecimiento de ácaros, se seleccionan 1000 de ellos y se les proporciona alimento para su crecimiento y reproducción. En la siguiente tabla se registra semanalmente la cantidad de ácaros, durante tres semanas consecutivas:

Cantidad "x" de semanas	Cantidad "C(x)" de ácaros
1	4000
2	7000
3	10000



5.1) ¿Cuál es el criterio (fórmula) que mejor representa la cantidad de ácaros en función de la cantidad de semanas?	5.2) ¿Cuántas semanas habrán transcurrido si la cantidad de ácaros es 28 000?
--	---

**ACTIVIDAD #2 Resuelva los siguientes problemas.**

1) Considere la siguiente información. Escriba en el paréntesis (V) si es verdadera la proposición o (F) si es falsa.

Una función S dada por  $S(x) = 300\,000 + 2000x$ , la cual describe el salario mensual "S(x)", en colones, que recibe el empleado de una empresa por la venta de "x" cantidad de artículos:

- 1.1) El empleado recibe un salario mensual de al menos ₡300 000 ( )
- 1.2) Si el empleado vende en un mes 40 artículos, entonces recibe un salario de ₡380000 ( )
- 1.3) Si el empleado vende en un mes 65 artículos, entonces recibe un salario de ₡450000 ( )

2) La academia "La Bella Música" está ofreciendo un curso de 20 sesiones para aprender a tocar guitarra. Toda persona que desee llevar el curso debe pagar de matrícula ₡40 000 y luego ₡5000 por cada sesión que asista. De acuerdo con lo anterior si un estudiante asistió sólo a 10 sesiones, entonces, ¿cuánto debe pagar en total?

3) Cinco compañeros crean un grupo de estudio y este aumenta en 2 miembros cada semana. Es decir, se inicia con 5 estudiantes, en la semana 1 habrá 7 personas, en la semana 2 se tendrán 9 integrantes y así sucesivamente conforme transcurran las semanas.

Si  $p(x)$  representa la cantidad de participantes en el grupo a las "x" semanas desde su creación, entonces, determine:

- 3.1) El criterio o fórmula que represente la situación descrita.
- 3.2) ¿Cuántas semanas deben pasar para que el grupo tenga 35 integrantes?

4) Considere la siguiente tabla que representa la relación entre la cantidad de artículos producidos (x) por una fábrica y el costo de su elaboración (y) en miles de colones:

x	1	2	3	4	5
y	15	21	27	33	39

De acuerdo con lo anterior, determine lo siguiente:

- 4.1) Un criterio o fórmula que represente la situación descrita.
- 4.2) La cantidad de artículos producidos si el costo fue de 117 mil colones.

5) Una clínica le paga a un señor ₡7000 diarios por cuidar los carros de sus clientes y, además, cada cliente le da una propina de ₡300. De acuerdo con lo anterior determine:

5.1) Una fórmula que represente el monto total diario que gana el señor al cuidar  $x$  cantidad de carros.

5.2) Calcule cuanto gana el señor en un día si cuidó 15 carros.

6) Considere la siguiente situación:

Una familia adquirió una deuda de ₡2100000 para remodelar la fachada de su casa y hace un abono mensual de ₡140000 a la cuenta principal. De acuerdo con lo anterior, conteste lo siguiente:

6.1) Complete la siguiente tabla, la cual resume lo adeudado en los primeros 4 meses.

Mes	Monto (saldo)
1	₡1 960 000
2	
3	
4	

6.2) Determine la fórmula que represente el monto adeudado en función del mes.

6.3) ¿Cuánto será lo adeudado en el mes 13?

TRABAJO COTIDIANO – Problemas con funciones Lineales	Valoración
Resuelve problemas en contextos reales utilizando funciones lineales	

## EJERCICIOS ADICIONALES

Considere la siguiente información para las preguntas 1 y 2:

La masa ideal de un ser humano adulto se estima mediante el modelo  $m(x) = \frac{3}{4}x - \frac{125}{2}$

donde la masa “ $m(x)$ ” está dada en kilogramos y la altura del individuo “ $x$ ” centímetros.

1) ¿Cuál es la masa estimada, en kilogramos, para una persona con 152cm de altura?

- A) 51,50
- B) 61,00
- C) 82,00
- D) 92,66



2) Si la masa ideal estimada de un adulto es de 62 kg, entonces, la estatura en centímetros, de esa persona corresponde a

- A) 83
- B) 91
- C) 152
- D) 166



Considere la siguiente información para responder los ítems 3 y 4:

Una empresa confecciona cobertores de sillones. El costo de producir cada cobertor es de 650 colones y cada uno se vende en 2400 colones.

3) La función que modela la ganancia  $g(x)$  en términos de la cantidad “ $x$ ” de cobertores vendidos corresponde a

- A)  $g(x) = 1750x$
- B)  $g(x) = -1750x$
- C)  $g(x) = 2400x - 650$
- D)  $g(x) = 650x - 2400$



4) Considere las siguientes proposiciones:

I. Para que la ganancia sea de 28000 colones se deben vender 14 cobertores.

II. Si se venden 37 cobertores, la ganancia sería de 64750 colones.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II



Analice la siguiente situación para responder los ítems 5 y 6:

Una tienda de ropa tiene un costo fijo de ₡150 000 al mes y cada prenda que vende le cuesta ₡2 500.

5) Si la tienda vendió 100 prendas este mes, ¿cuál es el costo total de la tienda este mes?

- A) ₡250 000
- B) ₡400 000
- C) ₡275 000
- D) ₡275 000



6) Si el costo total de uno de los meses fue de ₡330 000, ¿Cuántas prendas vendió?

- A) 50
- B) 72
- D) 84
- E) 90



7) Carlos tiene una empresa que confecciona gorras. Los costos fijos mensuales de su empresa son de ₡100 000. Si cada gorra cuesta ₡3000 confeccionarla, entonces, una función que modela los costos mensuales totales  $c(x)$ , en colones, por confeccionar "x" cantidad de gorras corresponde a  $c(x) =$  \_\_\_\_\_

- A)  $103\ 000x$
- B)  $3000x + 100\ 000$
- C)  $100\ 000x + 3000$



8) Una bolsa de suero intravenoso de un litro (1000 ml) se aplica a un paciente, de modo que por cada minuto que pasa, ingresan 20 ml de suero al cuerpo. Si "s(x)" es la cantidad de suero (en ml) que contiene la bolsa a los "x" minutos de iniciado el tratamiento, entonces, ¿cuál es el modelo matemático que mejor se adapta a la situación?

- A)  $s(x) = 20x - 1000$
- B)  $s(x) = 1000 - 20x$
- C)  $s(x) = 1000x - 20$



**HABILIDADES:**

-Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ .

-Relacionar la representación gráfica con la algebraica.

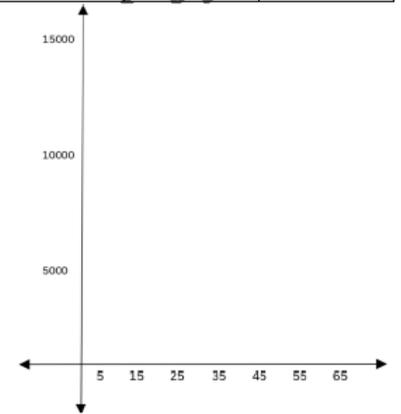
**ACTIVIDAD DE INICIO:**

El criterio  $g(x) = -20x^2 + 1400x - 12000$  representa una función cuadrática que relaciona la ganancia "g(x)" en dólares que obtendría una compañía según el precio de venta "x" por unidad, de cada uno de sus productos.

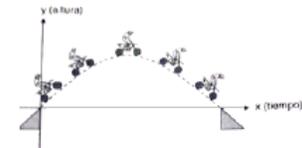
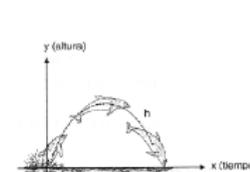
Utilice el criterio dado para llenar la siguiente tabla e indique con cual de los precios dados, se obtiene la mayor ganancia:

x	15	25	35	45	55
g(x)					

Analice el comportamiento de la gráfica.



En una función cuadrática, al desarrollar su criterio la variable dependiente (y) puede pasar que se repitan valores, por lo que la forma de la gráfica ya no está representada por una recta como sucede en las funciones lineales. Las gráficas de las funciones cuadráticas son curvas que se les denominan **parábolas**.



## CARÁCTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Es una función polinómica que tiene grado dos, y se define por  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , con  $a \neq 0$ . Su gráfica es una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje Y.

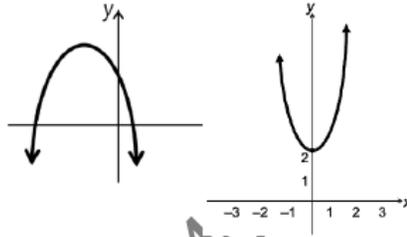
**Análisis de los coeficientes:**

➤ **Coficiente "a":**

Concavidad:

Si  $a > 0$  f es cóncava hacia arriba U.

Si  $a < 0$  f es cóncava hacia abajo ∩.



➤ **Coficiente "c":** Indica por donde la parábola interseca el eje Y.

Para  $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ , tenemos que  $a=4$ ,  $b=-5$ ,  $c=1$ , por lo tanto, como  $a > 0$  entonces su gráfica es cóncava hacia arriba e interseca al eje Y en (0,1).

Para  $g(x) = 6 - 9x^2$ , tenemos que  $a=-9$ ,  $b=0$ ,  $c=6$ , por lo tanto, como  $a < 0$  entonces su gráfica es cóncava hacia abajo e interseca al eje Y en (0,6).

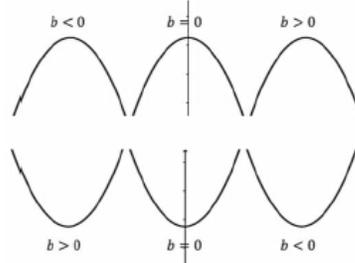
➤ **Coficiente "b":** Indica por donde la posición del vértice (punto más bajo o alto) según el eje Y.

**Si la parábola es cóncava hacia abajo:**

Si  $b < 0$ , su punto máximo estará a la izquierda de Y

Si  $b = 0$ , su punto máximo estará sobre Y

Si  $b > 0$ , su punto máximo estará a la derecha de Y



**Si la parábola es cóncava hacia arriba:**

Si  $b > 0$ , su punto mínimo estará a la izquierda de Y

Si  $b = 0$ , su punto mínimo estará sobre Y

Si  $b < 0$ , su punto mínimo estará a la derecha de Y



www.profesergiocm.com

**ACTIVIDAD #1:** Para las siguientes funciones cuadrática, indique los valores de los coeficientes a, b, c y si su gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

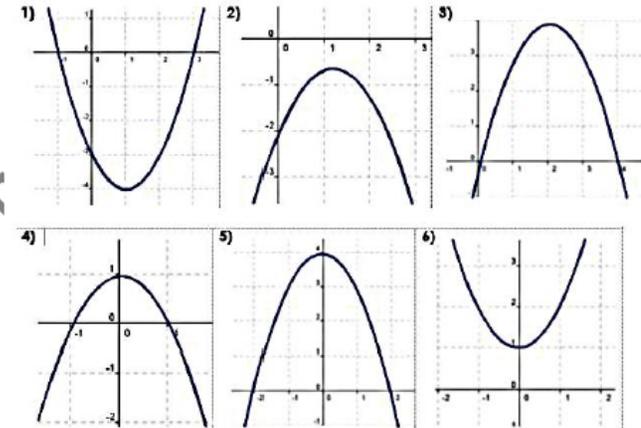
Función	valor de "a"	valor de "b"	valor de "c"	Concavidad
<b>Ejemplo:</b> $m(x) = x^2 - 5x - 9$				
a) $h(x) = x^2 - 4x + 8$				
b) $f(x) = 6 - 7x^2$				
c) $k(x) = 12x - 8000x^2$				
d) $h(x) = \frac{3x}{4} + 6x^2 - 1$				
e) $c(m) = -4m^2 + 8m + 100$				

**ACTIVIDAD #2:** Indique el comportamiento de los coeficientes "a", "b" y "c" en cada gráfica de las siguientes funciones cuadráticas.

Función 1:  $a > 0$   $b < 0$   $c < 0$  Función 2: \_\_\_\_\_

Función 3: \_\_\_\_\_ Función 4: \_\_\_\_\_

Función 5: \_\_\_\_\_ Función 6: \_\_\_\_\_



www.profesergiocm.com

➤ **Intersecciones con los ejes:** Son los pares ordenados que nos indica por donde la parábola interseca tanto al eje Y como eje X.

También, es posible saber la cantidad de intersecciones en X conociendo el valor del discriminante:

➤ **Discriminante:**  $\Delta = b^2 - 4ac$  (se usan los coeficientes de la función)

Al realizar esta fórmula el resultado puede ser positivo, cero o negativo:

- Si  $\Delta > 0$  (positivo) f interseca el eje x en dos puntos diferentes.
- Si  $\Delta = 0$  f interseca el eje x en un punto.
- Si  $\Delta < 0$  (negativo) f no interseca el eje x.

★ Para  $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ , tenemos que  $a=4$ ,  $b=-5$ ,  $c=1$ , se resuelve  $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$  por lo tanto  $\Delta = 9$ . **Conclusión = tiene 2 intersecciones con X.**

★ Para  $f(x) = 1 + 9x^2$ , tenemos que  $a=9$ ,  $b=0$ ,  $c=1$ , se resuelve  $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1$  por lo tanto  $\Delta = -36$ . **Conclusión = NO tiene intersecciones con X.**

★ Para  $h(x) = 4x^2 + 4x + 1$ , tenemos que  $a=4$ ,  $b=4$ ,  $c=1$ , se resuelve  $\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$  por lo tanto  $\Delta = 0$ . **Conclusión = tiene 1 intersección con X.**

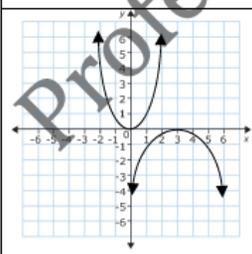
Ahora, para saber exactamente las intersecciones con los ejes:

**Eje y:** Se da por el punto  $(0, c)$ . La función cuadrática siempre interseca al eje Y en un punto.

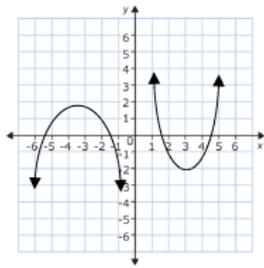
**Eje x:** Es posible que la función cuadrática tenga una, dos o ninguna intersección con el eje X.

Para saber sus intersecciones, se resuelve la ecuación  $f(x) = ax^2 + bx + c$  donde

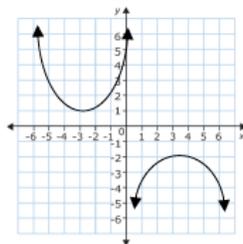
Si la ecuación tiene una solución, su punto se representa como  $(x, 0)$ .



Si la ecuación tiene dos soluciones, sus puntos se representan como  $(x_1, 0)$  y  $(x_2, 0)$ .



Si la ecuación no tiene soluciones, simplemente se responde que no posee intersecciones.



Para determinar los puntos de intersección apoyados por la calculadora, necesitamos ingresar a:

\*GRIS CASIO : MODE 5 3

\*CASIO CLASSWIZ: MENU (-) 2 2

\*Nueva CASIO CLASSWIZ CW: HOME → Ecuación → Polinómica →  $ax^2 + bx + c$

Se ingresan los valores de  $a, b, c$  y presionan =

Puede que, de una, dos o ninguna solución. La cantidad de soluciones indica la cantidad de intersecciones con X.

Pueden comprobarlo con:  $f(x) = x^2 + x - 20$ , donde  $x_1 = 4$  y  $x_2 = -5$ , por lo tanto sus intersecciones son  $(4, 0)$  y  $(-5, 0)$ .

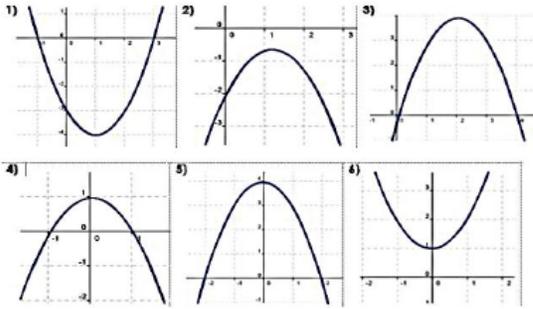
En el siguiente vídeo, se repasa lo explicado en la página anterior respecto a intersecciones y análisis del discriminante. Luego, explica con detalle el cuadro que se presenta a continuación.



**EJEMPLO:** Determine las intersecciones solicitadas.

CRITERIO Y cálculo del DISCRIMINANTE	POSIBLES INTERSECCIONES CON X	INTERSECCIÓN CON Y
$f(x) = x^2 + x - 2$		
$h(x) = -x^2 + 8x - 16$		
$g(x) = 3x^2 + 6$		

**ACTIVIDAD #3:** Marque con X la opción correcta para cada función, según el comportamiento de la gráfica, según su discriminante.

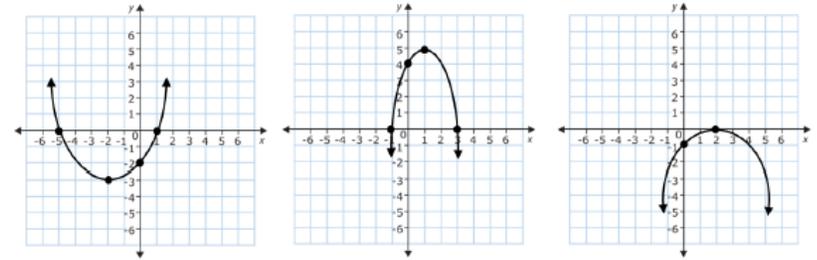


- 1) En la gráfica 1, se cumple que: ( )  $\Delta < 0$  ( )  $\Delta = 0$  ( )  $\Delta > 0$   
 2) En la gráfica 2, se cumple que: ( )  $\Delta < 0$  ( )  $\Delta = 0$  ( )  $\Delta > 0$   
 3) En la gráfica 3, se cumple que: ( )  $\Delta < 0$  ( )  $\Delta = 0$  ( )  $\Delta > 0$   
 4) En la gráfica 4, se cumple que: ( )  $\Delta < 0$  ( )  $\Delta = 0$  ( )  $\Delta > 0$   
 5) En la gráfica 5, se cumple que: ( )  $\Delta < 0$  ( )  $\Delta = 0$  ( )  $\Delta > 0$   
 6) En la gráfica 6, se cumple que: ( )  $\Delta < 0$  ( )  $\Delta = 0$  ( )  $\Delta > 0$

**ACTIVIDAD #4:** En las siguientes funciones cuadráticas, calcule el valor del discriminante e indique la cantidad de intersecciones en X que tiene la función.

<p>a) <math>f(x) = 2x^2 - 4x + 2</math>  <b>Planteo:</b></p> <p>R/ El valor del discriminante corresponde a _____ por lo tanto esa función posee _____ intersecciones con el eje X.</p>	<p>b) <math>f(x) = 9 - x^2</math>  <b>Planteo:</b></p> <p>R/ El valor del discriminante corresponde a _____ por lo tanto esa función posee _____ intersecciones con el eje X.</p>
<p>c) <math>h(x) = 4x - 8x^2</math>  <b>Planteo:</b></p> <p>R/ El valor del discriminante corresponde a _____ por lo tanto esa función posee _____ intersecciones con el eje X.</p>	<p>d) <math>k(x) = 3x^2 + 4x + 9</math>  <b>Planteo:</b></p> <p>R/ El valor del discriminante corresponde a _____ por lo tanto esa función posee _____ intersecciones con el eje X.</p>

**ACTIVIDAD #5:** Analice las siguientes gráficas, e indique los pares ordenados que representan sus puntos de intersección con X y Y.



Interseca a X en \_\_\_\_\_, Interseca a X en \_\_\_\_\_, Interseca a X en \_\_\_\_\_.

Interseca a Y en \_\_\_\_\_, Interseca a Y en \_\_\_\_\_, Interseca a Y en \_\_\_\_\_.

**ACTIVIDAD #6:** Para cada una de las siguientes funciones, indique las intersecciones con X y Y.

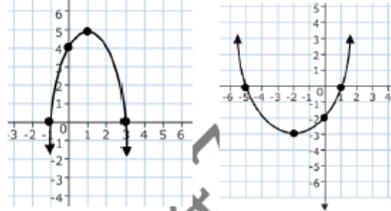
<p>a) <math>h(x) = x^2 + 14x + 49</math></p> <p>Interseca a X en _____.</p> <p>Interseca a Y en _____.</p>	<p>b) <math>h(x) = x^2 - 25</math></p> <p>Interseca a X en _____.</p> <p>Interseca a Y en _____.</p>
<p>c) <math>k(x) = x^2 + 2x - 15</math></p> <p>Interseca a X en _____.</p> <p>Interseca a Y en _____.</p>	<p>d) <math>f(x) = x^2 + 3x + 5</math></p> <p>Interseca a X en _____.</p> <p>Interseca a Y en _____.</p>
<p>e) <math>h(x) = 5x - 10x^2</math></p> <p>Interseca a X en _____.</p> <p>Interseca a Y en _____.</p>	<p>f) <math>k(x) = x^2 + 3x + 2</math></p> <p>Interseca a X en _____.</p> <p>Interseca a Y en _____.</p>

## VÉRTICE DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Corresponde al punto más alto o bajo de la parábola. Se define por  $v = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$  y

con eso obtenemos el par ordenado. Al menos, esta es la fórmula tradicional, aunque hay otras alternativas.

Gráficamente, determinar el vértice no es complejo. Podemos verlo en este ejemplo donde el vértice corresponde al punto (1,5) siendo ese el punto más alto de la parábola (punto máximo).



O en el segundo caso donde el punto (-2,-3) es el punto más bajo de la parábola (punto mínimo).

Pero si tenemos el criterio de la función cuadrática, hay varias alternativas:

**ALTERNATIVA 1:** Su fórmula  $v = \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$ . Vamos a determinar el vértice de

$$f(x) = x^2 - 9$$

**Paso 1:** Tener los coeficientes identificados,  $a=1, b=0, c=-9$

**Paso 2:** Calcular la parte "x" que es  $\frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0$

**Paso 3:** Calcular el discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , que sería  $\Delta = (0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9$ , por lo tanto  $\Delta = 36$

**Paso 4:** Ahora, calcular la parte "y" de la fórmula:  $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$

Por lo tanto, el vértice es (0,-9) siendo este el punto mínimo de la parábola. Es el punto mínimo porque es cóncava hacia arriba ( $a=1$ ).

**ALTERNATIVA 2:** Para el mismo ejemplo  $f(x) = x^2 - 9$ , conservamos el paso 1 y 2 para obtener el "x".

**Paso 1:** Tener los coeficientes identificados,  $a=1, b=0, c=-9$

**Paso 2:** Calcular la parte "x" que es  $\frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0$

**Paso 3:** Y para obtener el "y", ese  $x = 0$  del paso 2 lo sustituimos directamente en el criterio  $f(x) = x^2 - 9$ , quedando  $f(0) = (0)^2 - 9$ , por lo tanto  $y = -9$ .

Así, el vértice corresponde a (0, -9).

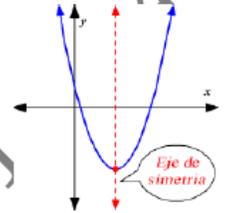
**ALTERNATIVA 3:** Si posee una calculadora CASIO CLASSWIZ, vea el siguiente video:



## EJE DE SIMETRÍA

Del vértice, se deduce el **EJE DE SIMETRÍA** que es la recta vertical que divide en dos partes iguales la parábola. Se

calcula con  $x = \frac{-b}{2a}$

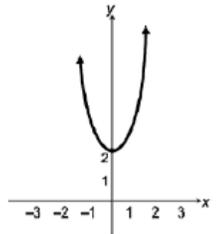


Con la información del vértice, podemos indicar los intervalos crecientes y decrecientes, además de su ámbito.

Ya que si la parábola es cóncava hacia arriba ( $a > 0$ ) entonces:

f es decreciente en  $]-\infty, \frac{-b}{2a}[$  y f es creciente en  $]\frac{-b}{2a}, +\infty[$ .

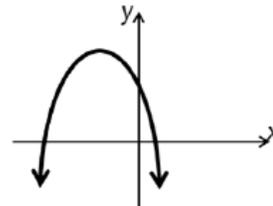
Su ámbito corresponde a  $]\frac{-\Delta}{4a}, +\infty[$



Ya que si la parábola es cóncava hacia abajo ( $a < 0$ ) entonces:

f es creciente en  $]-\infty, \frac{-b}{2a}[$  y f es decreciente en  $]\frac{-b}{2a}, +\infty[$

Su ámbito corresponde a  $]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}]$



**Ejemplo:** con la guía del docente, resuelva

A) Basándose en la gráfica, determine lo que se le solicita en cada caso.

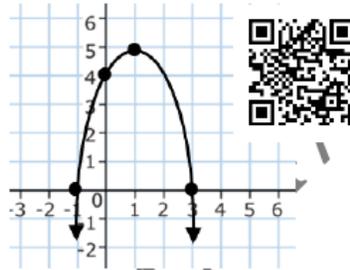
-¿Cuál es el vértice de esta función? \_\_\_\_\_.

Por lo tanto:

-La función es creciente en \_\_\_\_\_.

-La función es decreciente en \_\_\_\_\_.

-Su ámbito es \_\_\_\_\_.



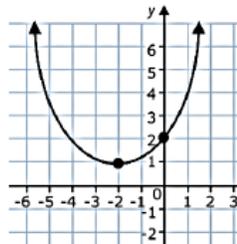
B) Para la función  $f(x) = x^2 - 4x$ , calcule el vértice, eje de simetría, intervalos de variación y ámbito.



**ACTIVIDAD #7:** resuelva los ejercicios propuestos a continuación.

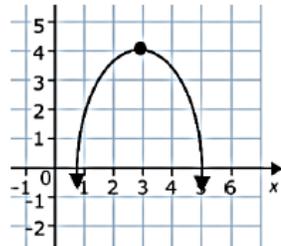
1) Para la siguiente gráfica, indique lo que se solicita:

- a) Vértice \_\_\_\_\_
- b) Eje de simetría: \_\_\_\_\_
- c) Intervalo creciente: \_\_\_\_\_
- d) Intervalo decreciente: \_\_\_\_\_
- e) Ámbito: \_\_\_\_\_



2) Para la siguiente gráfica, indique lo que se solicita:

- a) Vértice \_\_\_\_\_
- b) Eje de simetría: \_\_\_\_\_
- c) Intervalo creciente: \_\_\_\_\_
- d) Intervalo decreciente: \_\_\_\_\_
- e) Ámbito: \_\_\_\_\_



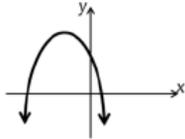
3) Para las siguientes funciones cuadráticas, complete lo que se solicita.

Función	Vértice	Eje de simetría	Intervalo creciente	Intervalo decreciente	Ámbito
a) $k(x) = 3 - 4x^2$					
b) $h(x) = x^2 + 6x$					
c) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$					
d) $f(x) = -x^2 + 9$					

TRABAJO COTIDIANO – Función Cuadrática.	Valoración
Analiza los coeficientes "a" "b" "c" en la función cuadrática para determinar su concavidad y otras características.	
Determina la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una función dada en forma algebraica y gráficas.	
Determina el eje de simetría y el vértice a partir de una función cuadrática en su forma algebraica y gráfica.	

### EJERCICIOS ADICIONALES

1) La siguiente gráfica corresponde a una función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$



Considere las siguientes proposiciones:

- I.  $a > 0$       II.  $\Delta < 0$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

Considere la siguiente información para responder las preguntas 2 y 3:

Sea  $f$  una función cuadrática con criterio  $f(x) = x^2 + 2x - 15$

2) Con base a la información anterior analice las siguientes proposiciones:

- I.  $\Delta > 0$   
II. La gráfica interseca al eje  $y$  en el punto  $(0, 15)$ .

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

3) Con base a la información anterior analice las siguientes proposiciones:

- I. El vértice corresponde al punto  $(-1, -16)$   
II. Uno de los puntos de intersección con el eje de las abscisas es  $(-5, 0)$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

4) Sea  $f$  una función cuadrática con criterio  $f(x) = 7x^2 + 5x$ , considere las siguientes proposiciones:

- I. La función  $f$  interseca dos veces el eje de las abscisas.  
II. El punto mínimo corresponde al punto  $\left(\frac{-5}{14}, \frac{-25}{28}\right)$ .

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

5) Considere la siguiente información:

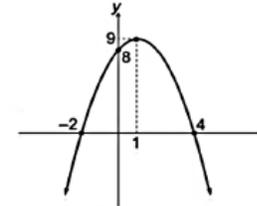
Sea  $f$  una función dada por  $f(x) = -x^2 + 6x$ , con  $\Delta > 0$ . Considere las siguientes proposiciones:

- I. La gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba.  
II. La gráfica de  $f$  tiene dos intersecciones con el eje  $x$ .

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas  
B) Ninguna  
C) Solo la I  
D) Solo la II

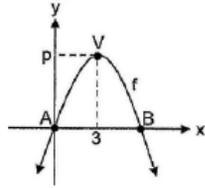
6) Considere la siguiente representación gráfica de una función cuadrática  $f$ :



De acuerdo con la información anterior, el criterio de  $f$  corresponde a:

- A)  $f(x) = x^2 - 2x - 8$   
B)  $f(x) = x^2 + 2x - 8$   
C)  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$   
D)  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

Para responder los ítems 7 y 8, considere la siguiente información de una función cuadrática  $f$  de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde A representa el origen de coordenadas y V el punto máximo que alcanza la gráfica:



7) De acuerdo con los datos de la figura dada, considere las siguientes proposiciones:

- I.  $c = 0$
- II.  $a > 0$

De ellas son verdaderas:

- A) ambas.
- B) solo la I.
- C) solo la II.



8) Con base en la información dada, considere las siguientes proposiciones:

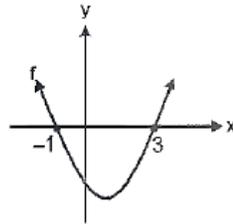
- I.  $\Delta > 0$
- II. B está constituido por el par ordenado  $(6, 0)$ .

De ellas son verdaderas:

- A) solo la I.
- B) solo la II.
- C) ambas



9) Considere la siguiente gráfica de una función  $f$  de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ :



Considere las siguientes afirmaciones:

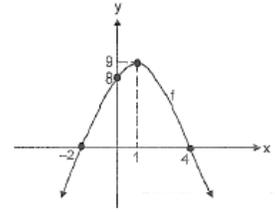
- I.  $\Delta < 0$ .
- II.  $f$  es negativa en el intervalo  $]-1, 3[$ .
- III. El eje de simetría de  $f$  corresponde a  $x = 1$ .

De ellas son verdaderas:

- A) solo la I.
- B) solo la I y la II.
- C) solo la II y la III.



Para responder los ítems 10 y 11, considere la siguiente gráfica de la función  $f$ , la cual es de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ :



10) ¿Cuál de las siguientes opciones contiene una afirmación correcta respecto a la función  $f$ ?

- A)  $a > 0$
- B)  $c = 9$
- C)  $\Delta > 0$

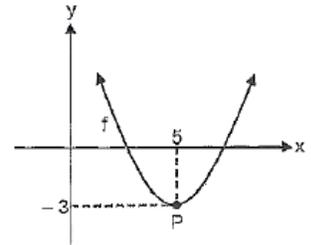


11) El eje de simetría de  $f$  corresponde a:

- A)  $y = 1$
- B)  $x = 1$
- C)  $y = 9$



Para contestar los ítems 12, y 13, considere la siguiente gráfica de la función  $f$ , la cual es de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ , donde P representa el vértice de la gráfica:



12) ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

- A)  $f$  no posee raíces reales.
- B)  $f$  posee dos raíces reales.
- C)  $f$  posee solo una raíz real.



13) ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

- A) Se cumple que  $a < 0$ .
- B) El eje de simetría de  $f$  es  $-3$ .
- C) Un intervalo donde  $f$  es positiva corresponde a  $]-6, 0[$ .



**HABILIDAD:**

-Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.

**PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON FUNCIONES CUADRÁTICAS**

En la resolución de problemas con la función cuadrática, podemos encontrarlos con distintas situaciones y maneras de resolver:

**CALCULANDO LA IMAGEN:** Usando el procedimiento tradicional de cálculo de imagen.

El criterio  $g(x) = -20x^2 + 1400x - 12000$  representa una función cuadrática que relaciona la ganancia "g(x)" en dólares que obtendría una compañía según el precio de venta "x" por unidad, de cada uno de sus productos.

Utilice el criterio dado para llenar la siguiente tabla e indique con cual, de los precios dados, se obtiene la mayor ganancia:

x	15	25	35	45	55
g(x)	4500	10500			

Por ejemplo: si el precio de venta "x" es 15 entonces, se sustituye en la función  $g(15) = -20(15)^2 + 1400(15) - 12000$  por lo tanto  $g(15) = 4500$  lo que significa que, al vender el producto en 15, la ganancia obtenida es 4500.

$g(25) = -20(25)^2 + 1400(25) - 12000$ , por lo tanto  $g(25) = 10500$  lo que significa que, al vender el producto en 25, la ganancia obtenida es 10500.

De igual manera se calculan las otras ganancias.

**USANDO LOS VALORES DEL VÉRTICE:** muchos problemas se resuelven ubicando el punto mínimo o máximo de la parábola. Solo hay que leer bien si lo que se necesita es el X del vértice (variable independiente) o el Y (variable dependiente).

Recordemos para calcular el vértice:

Donde X se calcula con  $x = \frac{-b}{2a}$

Donde Y se calcula sustituyendo "x" en  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , o la fórmula  $\frac{-\Delta}{4ab}$

Si tiene el modelo CASIO Classwiz: **MENU (-) 2 2:** luego de ingresar los valores a,b,c el vértice se evidencia luego de las intersecciones con X.

Si tiene el modelo CASIO CW: **HOME → Ecuación → Polinómica →  $ax^2 + bx + c$ :** luego de ingresar los valores a,b,c el vértice se evidencia luego de las intersecciones con X.

Veamos dos casos donde la clave está en el cálculo del vértice. El caso 1 con la parte "y" y el caso 2 con la parte "x".

**CASO 1:**

Para decorar un jardín de un hotel, se han instalado dispositivos de "chorro" de agua, los cuales mantienen un fluido con velocidad y ángulo continuo. Los diseñadores establecen que la parábola que forma el "chorro" de agua está dada por la siguiente función, siendo "h" la altura:  $h(x) = -x^2 - 2x + 3$ . ¿Cuál es la altura máxima de ese chorro?



**CASO 2:**

El ingreso mensual "I(x)" de cierta compañía está dado por  $I(x) = 770x - 7x^2$ , donde "x" es el precio, en dólares, del producto que fabrica la compañía. ¿Cuál debe ser el precio en dólares, del producto para que la compañía reciba el máximo de ingreso mensual?



**ACTIVIDAD #1: Resuelva los siguientes problemas.**

1) Los costos de producción "C" por producir "x" cantidad de artículos en una empresa, están dados por la función  $C(x) = 0,1x^2 - 5x + 1000$ ; donde C está en dólares. ¿Cuál es el costo en dólares de producir 300 artículos?

2) La trayectoria de un balón lanzado hacia arriba está modelada por  $h(t) = 15t - 4,9t^2$ , donde "h" es la altura en metros que alcanza el balón a los "t" segundos de haberse lanzado (suponga que el roce del aire no afecta). ¿Cuántos segundos tardó el balón en alcanzar la altura máxima?

3) La ganancia "g(x)" en miles de dólares por la venta de "x" unidades de cierto artículo, está modelada por  $g(x) = -x^2 + 66x - 480$ . ¿Cuántos de esos artículos se deben vender para obtener la mayor ganancia posible?

4) El costo "C(x)" en miles de dólares por producir "x" unidades de relojes finos está modelado por  $c(x) = x^2 - 30x + 245$ . ¿Cuántos de esos relojes se deben producir para obtener el menor costo posible?

5) La ganancia "g(x)" de una empresa, en dólares, por producir "x" unidades de un cierto artículo está modelada por  $g(x) = -3x^2 + 1800x$ . ¿Cuál es la máxima ganancia, en dólares, que puede obtener la empresa?

6) La trayectoria de un objeto lanzado hacia arriba desde el suelo está modelada por  $h(t) = -5t^2 + 30t$ , donde h(t) es la altura en metros que alcanza el objeto a los "t" segundos de haberse lanzado.

a) ¿Cuál es la altura máxima, en metros que alcanza el objeto?

b) ¿Cuál es la altura del objeto a los 4 segundos?

c) ¿Cuántos segundos tarda el objeto desde que fue lanzado hasta que este regresa al suelo?

TRABAJO COTIDIANO – Problemas con Funciones Cuadráticas.	Valoración
Plantea y resuelve problemas en contextos reales utilizando la función cuadrática.	

**EJERCICIOS ADICIONALES**

1) Si el costo "c" (en dólares) que tiene una empresa, al producir "x" unidades de cierto producto está dado por  $c(x) = 0,2x^2 - 10x + 400$ , entonces, ¿Cuál es, en dólares, el costo mínimo que tiene esa empresa por la producción de las "x" unidades?

- A) 25
- B) 275
- C) 325
- D) 400



**Analice la siguiente información para responder los ítems 2 y 3:**

La parábola que realiza un proyectil en el aire está dada por la función  $h(x) = -0,8x^2 + 24x$  donde  $h(x)$  es la altura en metros alcanzada en "x" metros recorridos horizontalmente.

2) Considere las siguientes proposiciones:

- I. La altura máxima que alcanza el proyectil es de 180 metros.
- II. Cuando el proyectil alcanza 7 metros recorridos horizontalmente, entonces el proyectil tiene una altura de 130 metros.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II



3) ¿Cuál es la altura alcanzada por el proyectil cuando recorrió 30 metros horizontalmente?

- A) 0
- B) 372
- C) 744
- D) 1440



4) Un empresario estima que la utilidad semanal "U(x)", en miles de dólares, por la producción y venta de un artículo, está dada por  $U(x) = -10x^2 + 2000x$ , donde "x" representa la cantidad de artículos producidos y vendidos semanalmente. ¿Cuál es la utilidad máxima semanal, en dólares, que puede obtener la empresa?

- A) 100 000
- B) 200 000
- C) 400 000



5) Un niño subido en un tejado que está a 5 m de altura sobre un suelo plano, lanza una bola hacia arriba, la cual describe una parábola definida por  $h(x) = -x^2 + 4x + 5$ , en donde "h(x)" representa la altura alcanzada por la bola a los "x" segundos de haber sido lanzada. ¿Cuál es el tiempo en segundos que tarda la bola en alcanzar su altura máxima?

- A) 2
- B) 4
- C) 5



6) Los costos "c(x)" mensuales en miles de dólares de una empresa por producir "x" cantidad de relojes están modelados por  $c(x) = x^2 - 12x + 150$ . Si se produce solo un tipo de reloj, entonces, el menor costo mensual en que puede incurrir corresponde a \$\_\_\_\_\_.

- A) 138 000
- B) 150 000
- C) 114 000



7) El costo semanal, en dólares,  $c(x)$  que una empresa debe sufragar por producir "x" cantidad de unidades de cierto artículo está modelado por  $c(x) = 2x^2 - 60x + 1769$ . ¿Cuál es el menor costo posible que puede enfrentar la empresa en una semana?

- A) \$240
- B) \$1319
- C) \$1769



8) Un empresario estima que la utilidad semanal "u(x)", en dólares, por la comercialización de un producto está dada por  $u(x) = 100x - 0,5x^2$ , donde "x" representa la cantidad de unidades producidas y vendidas semanalmente. ¿Cuál es la utilidad semanal máxima, en dólares, que puede obtener el empresario por la comercialización de ese producto?

- A) 5000
- B) 4000
- C) 1000



### HABILIDADES:

- Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

## SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Es un conjunto de ecuaciones lineales, es decir un sistema de ecuaciones donde cada ecuación es de primer grado. El sistema que se va a estudiar es un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$



Un sistema de dos ecuaciones puede tener: una solución, ninguna solución o infinitas soluciones. Ellos pueden clasificarse por el número de soluciones:

**SISTEMA DE ECUACIONES COMPATIBLE (CONSISTENTE):** es el que tiene al menos UNA solución.

- Si tiene solo una solución se le llama **COMPATIBLE DETERMINADO**.
- Si tiene infinitas soluciones, se le llama **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

**SISTEMA DE ECUACIONES INCOMPATIBLE (INCONSISTENTE):** es el que no tiene solución.

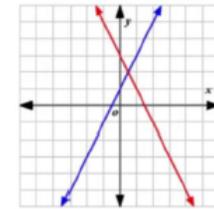
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, primero hay que verificar que el sistema esté ordenado, o sea, que ambas ecuaciones estén de la forma  $ax + by = c$  y luego aplicar el procedimiento correspondiente.

DETERMINE EL CONJUNTO SOLUCIÓN DEL SISTEMA 
$$\begin{cases} 2x + 3y - 20 = 0 \\ x - 3 = 2y \end{cases}$$

### SISTEMA DE ECUACIONES COMPATIBLE DETERMINADO:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

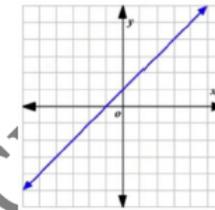
$$\begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ -8x + 2y = 10 \end{cases}$$



### SISTEMA DE ECUACIONES COMPATIBLE INDETERMINADO

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

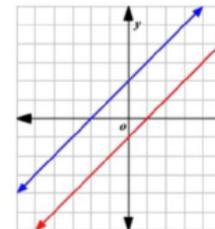
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 6x - 9y = 6 \end{cases}$$



### SISTEMA DE ECUACIONES COMPATIBLE INCOMPATIBLE

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 7 = -4y \end{cases}$$



**EJEMPLOS:** Resuelva con la guía del docente los siguientes sistemas de ecuaciones y determine su conjunto solución.

A) $\begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ y = 5 + 4x \end{cases}$	B) $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 15x - 21 - 3y = 0 \end{cases}$
C) $\begin{cases} 10x - 24 = -7y \\ y = \frac{2x}{3} + \frac{4}{3} \end{cases}$	D) $\begin{cases} 6x + 3y - 4 = 0 \\ 6y = 7 - 12x \end{cases}$

En el siguiente código se propone determinar la solución del sistema con el apoyo de la calculadora CASIO. Contiene la revisión y explicación de los 4 ejercicios anteriores.



**ACTIVIDAD #1:** Determine el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones.

A) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$	B) $\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ -4x + y = 13 \end{cases}$
---	---

C) $\begin{cases} x - 5y = 6 \\ -2x + 10y = -12 \end{cases}$	D) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x + 6 = -y \end{cases}$
E) $\begin{cases} -2x + y = 8 \\ 3x - y = -10 \end{cases}$	F) $\begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ -4x + y = 5 \end{cases}$
G) $\begin{cases} y - 2x + 5 = 0 \\ y - 2x = 7 \end{cases}$	H) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y - 4x = \frac{-5}{4} \end{cases}$
I) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - 12 = -9y \end{cases}$	J) $\begin{cases} -2x = -y - 15 \\ x = 11 + y \end{cases}$

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON SISTEMA DE ECUACIONES

Con las técnicas estudiadas anteriormente, se pueden resolver ciertos problemas aplicando un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Veamos algunos ejemplos:

**EJEMPLO #1:** María compra 5 cuadernos y 3 lapiceros en ₡3400. Noelia compra, a los mismos precios 8 cuadernos y 9 lapiceros en ₡6700. ¿Cuál es el precio total de comprar únicamente un cuaderno y un lapicero?



**EJEMPLO #2:** Dos personas A y B tienen juntas \$89. Si B tiene cuatro dólares menos que el doble de lo que tiene A, ¿Cuánto dinero tiene B?



**ACTIVIDAD #2:** Utilizando sistema de ecuaciones, resuelva los siguientes problemas.

1) Ana compra 2 mochilas y 5 estuches por ₡2600. Luis compra, a los mismos precios, 3 mochilas y 7 estuches por ₡3700. ¿Cuál es el precio total de comprar únicamente una mochila?

2) Pedro compra en una tienda americana 3 camisetas y 2 pantalones por ₡5300. Laura compra, a los mismos precios, 5 camisetas y 4 pantalones por ₡9500. ¿Cuál es el precio total de comprar únicamente una camiseta y un pantalón?

3) Una institución educativa pagó en el año 2020, ₡95000 por la compra de 50 cuadernos y 200 lapiceros. Meses después vuelve a comprar al mismo precio 170 cuadernos y 67 lapiceros, pero esta vez pagaron ₡139100. ¿Cuánto cuesta cada cuaderno y cada lapicero?

4) El costo de las entradas a una función de títeres es de ₡3000 para los adultos y ₡2000 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron ₡593000, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a la función el sábado?

5) Marco y sus amigos pagaron ₡10900 por 5 hamburguesas y 7 refrescos. Si la semana anterior consumieron 8 hamburguesas y 11 refrescos y la cuenta fue de ₡17300, ¿cuánto cuesta cada hamburguesa y cada refresco?

6) Marisol es costurera y quiere aprovechar una oferta de botones. El paquete de botones blancos cuesta ₡1500 y el de botones negros ₡1000. Si con ₡18000 compró en total 14 paquetes, ¿cuánto gastó en botones blancos?

7) Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

8) María y Ana tienen juntas ₡89000. Si Ana tiene ₡4000 más que el doble de lo que tiene María. ¿Cuánto dinero tiene cada una?

TRABAJO COTIDIANO – Sistema de Ecuaciones Lineales	Valoración
Determina el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	
Plantea y resuelve problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	

### EJERCICIOS ADICIONALES

1) Roy y Mary van a la misma ferretería a comprar clavos y tornillos. Además, se sabe que:

\*Ambos compraron a los mismos precios.

\*Roy pagó ₡2700 por 3 kilos de clavos y 2 de tornillos.

\*Mary pagó ₡1600 por 2 kilos de clavos y 1 de tornillos.

Con base en la información dada, un kilo de tornillos vale ₡\_\_\_\_\_.

- A) 400
- B) 540
- C) 550
- D) 600



2) Ana y Juana fueron a la pulpería juntas y compraron los siguientes productos:

Ana compró 5 kg de papas y 3 kg de yuca y pagó ₡4300 en total.

Juana compró 4 kg de papas y 2 kg de yuca y pagó ₡3200 en total.

Si ambas compraron a los mismos precios, entonces, ellas pagaron ₡\_\_\_\_\_ por cada kg de yuca.

- A) 600
- B) 640
- C) 750
- D) 860



3) Andrea pagó por 3 kg de papas y 2 kg de zanahoria un total de ₡2394. Luego Manuel pagó por 4 kg de papas y 5 kg de zanahoria un total de ₡4368. Si ambos compraron a los mismos precios, entonces, cada kg de zanahoria costó ₡\_\_\_\_\_.

- A) 462
- B) 492
- C) 504
- D) 550



4) Angie pagó ₡2800 por dos lapiceros y tres cuadernos. David canceló ₡3200 por 4 lapiceros y 2 cuadernos. Si él compró a los mismos precios que Angie, entonces, se pagó por cada cuaderno ₡\_\_\_\_\_.

- A) 400
- B) 545
- C) 560
- D) 600



5) En una actividad, el valor de 10 entradas para adulto y 9 para niño es ₡51200 y el valor de 15 entradas para adulto y 17 para niño es ₡83100.

De acuerdo con la información anterior, si cada entrada para adulto tiene el mismo valor y cada entrada para niño tiene el mismo valor, entonces el valor, en colones, de una entrada para niño es:

- A) 1800
- B) 2633
- C) 2695
- D) 3300



6) En una tienda en la cual se venden capas y paraguas, las capas cuestan ₡1400 cada una y los paraguas ₡2300 cada uno. Si en una semana se venden 52 unidades, entre capas y paraguas, y se obtiene por esa venta un monto de ₡98000, entonces, ¿cuántos paraguas se vendieron durante esa semana?

- A) 16
- B) 26
- C) 34
- D) 42



7) En una librería un profesor compra 5 libros de prácticas al mismo precio cada uno y 4 lapiceros al mismo precio cada uno, por lo cual paga en total ₡14300. Además, otro cliente compra 3 lapiceros y 6 libros, todos idénticos a los que compró el profesor y al mismo precio, y le cobran ₡16350 colones.

De acuerdo con la información anterior, el precio de cada lapicero, en colones, corresponde a

- A) 450
- B) 588
- C) 1133
- D) 2158



8) Una institución educativa pagó en el año 2015, ₡301 000 por la compra de 110 cuadernos y 200 lápices. En el año 2016, vuelve a comprar al mismo precio 250 cuadernos y 400 lápices, pero esta vez pagaron ₡665 000. ¿Cuánto cuesta cada cuaderno?

- A) ₡134
- B) ₡350
- C) ₡2100
- D) ₡2695



9) En el mes de febrero el consumo telefónico fue de 4400 minutos por el servicio A y de 5800 minutos por el servicio B. Por ese consumo la agencia tuvo que pagar ₡60 400. Si la suma de los costos por minuto de los dos servicios contratados es ₡11,5 entonces, ¿cuál fue el costo, en colones, por minuto de consumo del servicio de la empresa B en ese mes?

- A) 4
- B) 5
- C) 7
- D) 11



10) Un estudiante realiza una prueba de aptitud que consta de 40 preguntas. Por cada respuesta correcta obtiene 2,5 puntos, pero por cada respuesta incorrecta se penaliza la nota obtenida rebajando 0,75 puntos. Si el estudiante obtuvo un 70,75 de nota, en escala de 0 a 100, entonces ¿cuántas preguntas respondió correctamente?

- A) 9
- B) 17
- C) 23
- D) 31



11) Las entradas a un evento deportivo tenían un valor de ₡3700 bajo el sol y de ₡5200 a la sombra. Si al evento asistieron 349 personas y se recaudó ₡1622800 por la venta de las entradas, entonces, ¿cuántas personas presenciaron el evento a la sombra?

- A) 128
- B) 221
- C) 312
- D) 438



12) Un cajero automático contiene únicamente billetes de ₡2000 y ₡5000. Carlos necesita ₡110 000 y realiza la transacción en ese cajero por ese monto. Si el cajero le dispensa 34 billetes en total, entonces: ¿cuántos billetes de ₡5000 obtiene Carlos de ese cajero?

- A) 14
- B) 20
- C) 22
- D) 34

