



EDITORIAL PROYECTOS QR

FUNCIONES 12

COLEGIOS TÉCNICOS

www.profesergiocm.com

$$f(x) = e^x$$

NOMBRE: _____ GRUPO: _____

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTU DE MATEMÁTICAS

| FUNCIONES | DUODÉCIMO AÑO | TÉCNICOS

FUNCIONES 12º

TABLA DE CONTENIDOS	Página
FUNCIÓN EXPONENCIAL	2
¿QUÉ ES UN LOGARITMO?: FUNCIÓN LOGARÍTMICA	7
PROBLEMAS CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS	12
FUNCIONES Y MODELIZACIÓN	21

Apto para COLEGIOS TÉCNICOS (C.T.P)

PRECIO: 3.000 [28 Pág]

Este folleto se entrega en PDF y con personalización en el encabezado.

Contacto: 60147147

TODOS LOS EJEMPLOS DEL FOLLETO VIENEN EXPLICADOS en VÍDEOS QR.

SE HAN AÑADIDO MÁS EJERCICIOS ADICIONALES
El objetivo de esta MUESTRA es que pueda revisar el material previamente antes de su compra

FUNCION EXPONENCIAL EN SU REPRESENTACIÓN TABULAR, GRÁFICA Y ALGEBRAICA

ACTIVIDAD DE INICIO:

Karla redacta un mensaje de texto y un minuto después, lo envía a sus dos mejores amigos. Al siguiente minuto, sus dos mejores amigos reenvían el mensaje a otras dos personas y estas a su vez hacen lo mismo después de otro minuto. La cadena de envíos del mensaje continúa creciendo cada minuto, cuando cada nuevo receptor del mensaje lo reenvía a otras dos personas.

De acuerdo con la información anterior, si "y" es la cantidad de receptores del mensaje, después de "x" minutos a partir del instante en que Karla redactó el mensaje, entonces, complete la siguiente tabla de valores y realice su gráfica:

X							
Y							

FUNCIÓN EXPONENCIAL

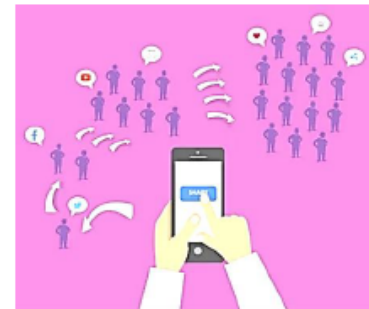
La función exponencial f con base a y variable x se denota mediante la expresión $f(x) = a^x$, donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ en donde $a > 0$, $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Algunas de sus aplicaciones.

La función exponencial se utiliza para modelar el crecimiento continuo de inversiones o deudas a lo largo del tiempo, como en el caso del interés compuesto.

En ciencias naturales, describe procesos de crecimiento o decrecimiento exponencial, como la desintegración radioactiva, el crecimiento de poblaciones o la difusión de sustancias en un medio.

Cuando un contenido se vuelve viral en una red social, su alcance tiende a crecer de manera rápida y exponencial a medida que más personas lo comparten y lo ven. Este crecimiento se asemeja al proceso exponencial, al menos en sus primeros días o semanas de publicación.



Para que una función sea exponencial, debe cumplir algunas características:

- La base debe ser un número positivo, pero distinto de uno.
- Su variable "x" debe ser parte del exponente.



Por lo tanto ¿son funciones exponenciales las siguientes expresiones?

$f(x) = (-7)^{x+1}$ R/ _____

$k(x) = (6x)^5$ R/ _____

$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$ R/ _____

Si la base "a" es un valor entre cero y uno ($0 < a < 1$) obtenemos una gráfica **decreciente**.

Veamos los ejemplos:

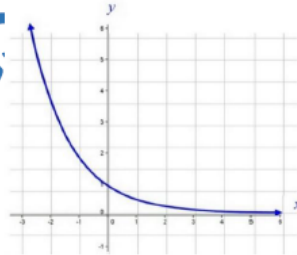
$f(x) = 0,4^x$ $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

En "h" al dividir $3 \div 4 = 0,75$

En "g" al dividir $1 \div 5 = 0,2$

Todas las bases son valores "entre 0 y 1".

Base entre cero y uno ($0 < a < 1$)



Si la base "a" es un valor mayor que uno ($a > 1$) obtenemos una gráfica **creciente**.

Veamos los ejemplos:

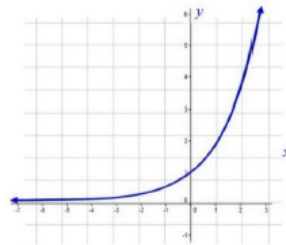
$f(x) = 3^x$ $h(x) = \left(\frac{13}{4}\right)^x$ $g(x) = \left(\frac{6}{5}\right)^x$

En "h" al dividir $13 \div 4 = 3,25$

En "g" al dividir $6 \div 5 = 1,2$

Todas las bases son mayores que 1.

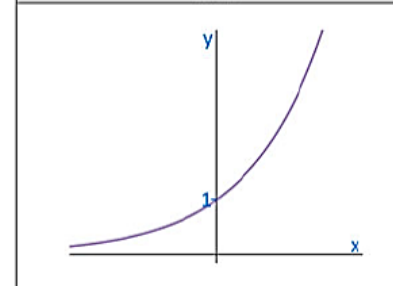
Base mayor que uno ($a > 1$)



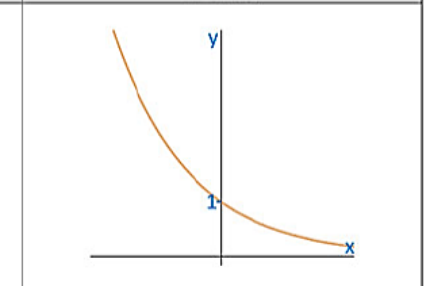
CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA FUNCIÓN $f(x) = a^x$

Caso donde $a > 1$	Caso donde $0 < a < 1$
a) Dominio:	a) Dominio:
b) Ámbito:	b) Ámbito:
c) La función es biyectiva.	c) La función es biyectiva.
d) Intersección con el eje X:	d) Intersección con el eje X:
e) Intersección con el eje Y:	e) Intersección con el eje Y:
f) Variación:	f) Variación:
g) Es asíntota:	g) Es asíntota:
Ejemplos:	Ejemplos:

$a > 1$



$0 < a < 1$



ACTIVIDAD#1: Determine cuales criterios se clasifican como funciones exponenciales.

Anote sí o no.

$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$f(x) = 8^{-x}$	$f(x) = x^3$	$g(x) = 0^x$
$f(x) = 4^{5x}$	$h(x) = x^{8x}$	$f(x) = e^x$	$k(x) = (7,5)^x$
$f(x) = x^x$	$f(x) = (-\pi)^x$	$h(x) = 75^{-x}$	$f(x) = 1^x$
$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$	$f(x) = \left(\frac{4}{7}\right)^{-2x}$	$f(x) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-x}$	$f(x) = \left(\frac{x}{5}\right)^{-2x}$

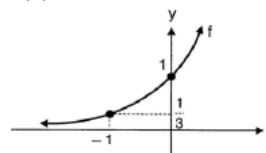
ACTIVIDAD#2: Clasifique las siguientes funciones exponenciales como crecientes o decrecientes.

$f(x) = 9^x$	$f(x) = (0,4)^x$	$f(x) = 7^{-x}$	$f(x) = (0,8)^{-x}$
$f(x) = (0,6)^x$	$m(x) = (2)^{-x}$	$f(x) = (\sqrt{2})^x$	$k(x) = 3^{-x}$
$h(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$	$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$	$g(x) = (\sqrt{5})^{-x}$	$f(x) = (1,3)^{-x}$

TRABAJO COTIDIANO – Función Exponencial	Valoración
Determina si la función presentada es o no una función exponencial.	
Analiza algebraicamente las funciones exponenciales para determinar su crecimiento o decrecimiento.	

EJERCICIOS ADICIONALES

1) Considere la siguiente representación gráfica de la función exponencial f dada por $f(x) = a^x$:



De acuerdo con la información anterior, el valor de "a" corresponde a

- A) 3 B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{-1}{3}$ D) -3

2) Considere las siguientes proposiciones referidas a la función f dada por $f(x) = \left(\frac{7}{6}\right)^x$:

- I. f es decreciente.
II. El ámbito de f es $]0, +\infty[$.
III. El punto $(0, 1)$ pertenece al gráfico de f .



¿Cuáles de ellas son verdaderas?

- A) Todas B) Solo la I y la II
C) Solo la I y la III D) Solo la II y la III

3) Las siguientes proposiciones se refieren a la función exponencial f dada por $f(x) = 0,2^{-x}$:

- I. f es estrictamente creciente.
II. $(1,5)$ es un elemento del gráfico de f .
De ellas, ¿Cuál o cuáles son verdaderas?
A) Ambas B) Ninguna
C) Solo la I D) Solo la II



4) Considere las siguientes proposiciones referidas a la función exponencial f dada por $f(x) = a^x$, tal que f es decreciente:

- I. $a \in]0, 1[$
II. La gráfica de f interseca al eje "y" en $(0,1)$.

De ellas, ¿Cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas B) Ninguna
C) Solo la I D) Solo la II



HABILIDADES

- Identificar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial.
- Analizar gráfica y algebraicamente las funciones logarítmicas.

¿QUÉ ES UN LOGARITMO?

Un logaritmo es el exponente al cual es necesario elevar a una determinada cantidad positiva para que resulte un número determinado. También se le conoce como la función inversa a la función exponencial.

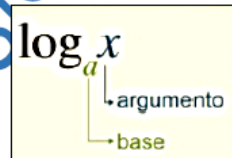
El logaritmo de argumento "x" se define como $\log_a x = y$ si y solo si $a^y = x$ para todo $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

EJEMPLOS DE LOGARITMOS Y SUS PARTES:

$\log_2 8 = 3$, donde 2 es la base, 8 el argumento y 3 es logaritmo.

$\log_5 25 = 2$, donde 5 es la base, 25 el argumento y 2 es logaritmo.

$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, donde $\frac{1}{3}$ es la base, 3 el argumento y -1 es logaritmo.



LOGARITMO DECIMAL

$\log 1000 = 3$, donde 10 es la base, 1000 el argumento y 3 es logaritmo.

LOGARITMO NATURAL

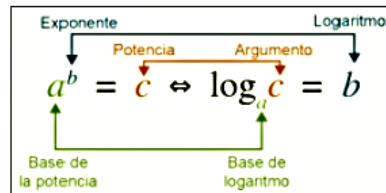
$\ln 8 = 2,08$, que es lo mismo que $\log_e 8 = 2,08$, donde "e" es la base, 8 el argumento y 2,08 es logaritmo.

CONVERSIÓN DE NOTACION EXPONENCIAL A LOGARÍTMICA Y VICEVERSA

Una expresión exponencial puede convertirse a una expresión logarítmica y viceversa, siguiendo el siguiente esquema:

$\log_2 8 = 3$ en notación exponencial es $2^3 = 8$

$3^4 = 81$ en notación logarítmica es $\log_3 81 = 4$



ACTIVIDAD #1: Convierta de notación exponencial a logarítmica y viceversa.

1) $6^2 = 36$	2) $2^5 = 32$	3) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}$
4) $5^{-2} = \frac{1}{25}$	5) $5^k = m$	6) $\log_3 6 = w$
7) $\log_3 27 = 3$	8) $\ln 14 = c$	9) $\log_4 k = 9$
10) $\log_m 50 = -2$	11) $\log 30 = x$	12) $9^y = 12$

FUNCION LOGARÍTMICA

Si $f(x) = a^x$ tal que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$ tal que $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Además $\log_a x = y$ si y solo si $a^y = x$ para todo $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, las funciones exponenciales y logarítmicas se consideran inversas.

Si $f(x) = 3^x$ entonces existe $f^{-1}(x) = \log_3(x)$

Si $h(x) = \log(x)$ entonces existe $h^{-1}(x) = 10^x$.

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Existen dos casos para las funciones de la forma $f(x) = \log_a x$ de acuerdo con su base:

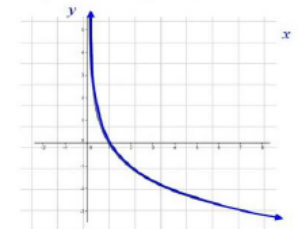
Si la base "a" es un valor entre cero y uno ($0 < a < 1$) obtenemos una gráfica **decreciente**.

Veamos los ejemplos:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad h(x) = \log_{0,3} x$$

En "f" al dividir $1 \div 2 = 0,5$

Todas las bases son valores "entre 0 y 1".



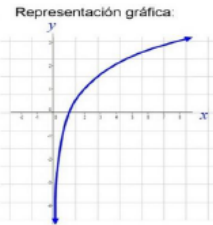
Si la base "a" es un valor mayor que uno ($a > 1$) obtenemos una gráfica **creciente**.

Veamos los ejemplos:

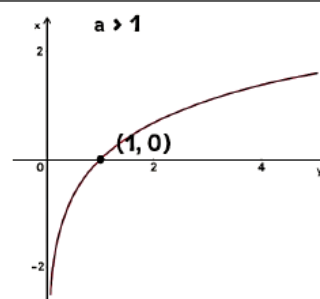
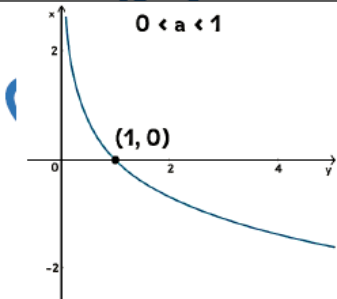
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad h(x) = \log_4 x$$

En "f" al dividir $3 \div 2 = 1,5$

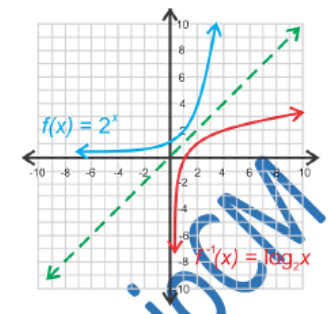
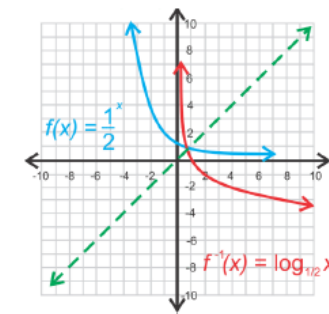
Todas las bases son mayores que 1.



CARACTERÍSTICAS	
Caso donde $0 < a < 1$	Caso donde $a > 1$
a) Dominio:	a) Dominio:
b) Ámbito:	b) Ámbito:
c) La función es biyectiva.	c) La función es biyectiva.
d) Intersección con el eje X:	d) Intersección con el eje X:
e) Intersección con el eje Y:	e) Intersección con el eje Y:
f) Variación:	f) Variación:
g) Es asintótica:	g) Es asintótica:
Ejemplos:	Ejemplos:



Ya que conocemos la gráfica de la función logarítmica, comparemos la gráfica de su inversa en cada uno de sus dos casos.



Observemos la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, donde $f(-3) = 8$, quiere decir que en su inversa $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ se cumple que $f^{-1}(8) = -3$.

ACTIVIDAD #2: Clasifique las siguientes funciones logarítmicas en creciente o decreciente:

1) $f(x) = \log_3 x$	2) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$	3) $f(x) = \log x$
4) $k(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$	5) $z(x) = \log_{3,2} x$	6) $k(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
7) $r(x) = \ln x$	8) $g(x) = \log_{\frac{6}{5}} x$	9) $f(x) = \log_{0,3} x$

ACTIVIDAD #3: Responda lo que se solicita en cada caso.

- ¿Cuál es el criterio de la inversa de $f(x) = 6^x$? _____.
- ¿Cuál es el criterio de la inversa de $h(x) = \log_4(x)$? _____.
- ¿Cuál es el criterio de la inversa de $g(x) = \ln(x)$? _____.
- ¿Cuál es el criterio de la inversa de $m(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$? _____.

TRABAJO COTIDIANO – Función Logarítmica y sus características	Valoración
Convierte expresiones exponenciales en logarítmicas y viceversa.	
Determina si una función logarítmica es creciente o decreciente según su criterio.	
Determina el criterio de la inversa en una función logarítmica o exponencial.	

EJERCICIOS ADICIONALES

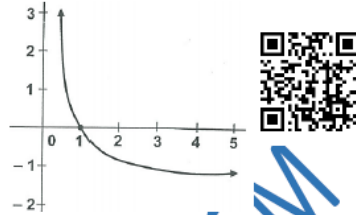
1) Considere la siguiente gráfica de la función logarítmica f dada por $f(x) = \log_a x$:

De acuerdo con la información:

- I. $0 < a < 1$
- II. f es creciente.

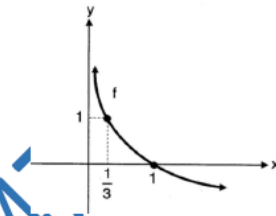
De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II



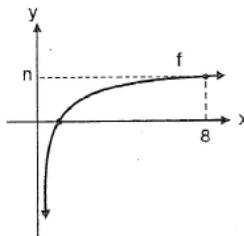
2) De acuerdo con la representación gráfica, el criterio que mejor se adapta a la función corresponde a

- A) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$
- B) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- C) $f(x) = \log_3(x)$
- D) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$



3) Considere la siguiente representación gráfica de la función logarítmica f dada por $f(x) = \log_2(x)$. ¿Cuál es el valor de "n"?

- A) 3
- B) 4
- C) 16
- D) 64



HABILIDADES:

- Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.
- Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales.
- Resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones logarítmicas.
- Utilizar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, a, b números reales positivos y distintos de 1, f, g polinomios de grado menor que 3.
- Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas

PROBLEMAS EN CONTEXTOS REALES

ACTIVIDAD DE INICIO:

Lucía pagó €11 000 000 por un carro nuevo. Suponga que el valor del carro nuevo se deprecia a una tasa de 20% anual. Por lo tanto, dentro de un año, el valor del carro de Lucía será 80% de su valor actual. Es decir, dentro de un año su valor será $11000000 \cdot (0,80)$; dentro de dos años será $11000000 \cdot (0,80) \cdot (0,80) = 11000000 \cdot (0,80)^2$, y así sucesivamente.

Por consiguiente, la fórmula para determinar el valor del carro nuevo en un momento dado es $v(t) = 11000000 \cdot (0,80)^t$, donde "t" es el tiempo en años.

a) Determine el valor del carro de Lucía dentro de:

- A) Un año
- B) Tres años
- C) Siete años

b) ¿Cuántos años deben pasar, para que el carro de Lucía adquiera un valor en el mercado de €2 883 584?

Para poder resolver situaciones como las anteriores, debemos recordar procedimientos básicos de las funciones, como lo es el cálculo de imagen y preimagen.

CÁLCULO DE IMAGEN:

Para calcular la imagen (y) en una función, necesitamos tener el criterio y una preimagen (x). Debemos realizar una sustitución del valor (preimagen) en la "x" del criterio.

¿Cuál es la **imagen** de -2 en $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$?



CÁLCULO DE PREIMAGEN:

Para calcular la preimagen (x) en una función, necesitamos tener el criterio y una imagen (y). Esa imagen será el "resultado". Por lo tanto, se debe plantear y resolver una ecuación exponencial.

¿Cuál es la **preimagen** de 8 en $h(x) = 2^{x+1}$? Aunque se puede resolver usando la calculadora CASIO en su "modo ecuación", es importante manejar sus procedimientos paso a paso.



ECUACIONES EXPONENCIALES

Es una ecuación donde la incógnita aparece en los exponentes de potencias para ciertas bases constantes. El procedimiento básico consiste en tratar de buscar que las bases sean iguales.

En la ecuación $3^x = 9^{x+4}$, el 9 puede convertirse en 3^2 .

Entonces $3^x = 3^{2(x+4)}$. Cuando las bases ya son iguales, se resuelve la ecuación resultante en los exponentes.

$$\begin{aligned}x &= 2(x+4) \\x &= 2x+8 \\x-2x &= 8 \\-x &= 8 \\x &= -8\end{aligned}$$

EJEMPLOS: Con la guía del docente, resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^{3x+5} = 32$	b) $4^{3x} = 16$	c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-5} = 49$
--------------------	------------------	--



ACTIVIDAD #1: Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones exponenciales. https://youtu.be/K0VOaKKo_60

a) $3^{2x+5} = 3^3$	b) $5^{x+6} = 25$
c) $2^{x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	d) $8^{x+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^m$
e) $3^{-x} = 81$	f) $\left(\frac{1}{16}\right)^n = 32$
g) $125^x = 5^{2x}$	h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} = 27^{2x-3}$

Para resolver ciertas ecuaciones exponenciales, es posible usar la conversión donde se cumple que $a^x = N \Leftrightarrow \log_a N = x$. De esta manera se convierte una ecuación exponencial básica en un logaritmo. En ocasiones se deben usar procesos algebraicos básicos de despeje.



EJEMPLOS: Con la guía del docente, resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

$3^x = 87$	$5^n = 40$	$4^{x-1} = 30$	$6^{m+4} = 10$
Se convierte en $\log_3 87 = x$			
Y al calcular el logaritmo se concluye que $x = 4,07$			

ACTIVIDAD #2: Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones exponenciales, aplicando $a^x = N \Leftrightarrow \log_a N = x$.

a) $4^x = 64$	b) $2^x = 50$	c) $3^{n+3} = 81$
d) $5^{k-4} = 40$	e) $7^m = 100$	f) $3^{4x-1} = 26$

TRABAJO COTIDIANO – Ecuaciones Exponenciales	Valoración
Determina el conjunto solución al resolver ecuaciones exponenciales.	

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Dependiendo la situación planteada, es posible resolver el problema aplicando el típico “cálculo de imagen” por medio de una sustitución de variable, o “calculando la preimagen” resolviendo una ecuación exponencial.

EJEMPLOS: Con la guía del docente, resuelva al detalle los siguientes problemas.

<p>La presión atmosférica “p” sobre un avión que se encuentra a una altura “x” en kilómetros sobre el nivel del mar está dada por $p(x) = 760e^{-0,145x}$.</p> <p>¿Cuál es aproximadamente la presión sobre un avión que se encuentra a una altura de 20km sobre el nivel del mar?</p>	<p>En un estudio, sobre una población inicial de 600 bacterias, se determina que la cantidad “f(t)” de bacterias, a las “t” horas después de haber iniciado ese estudio, está dada por $f(t) = 600 \cdot (3)^{\frac{t}{2}}$. ¿Cuántas horas deben transmitir, después de iniciado ese estudio, para que la población sea de 1800 bacterias?</p>

ACTIVIDAD#1: Resuelva los siguientes problemas.

1) Ana pagó €11.500.000 por un carro nuevo. Suponga que el valor del carro nuevo se deprecia a una tasa de 18% anual. Por lo tanto, dentro de un año, el valor del carro de Ana será 82% de su valor actual. Por consiguiente, la fórmula para determinar el valor del carro nuevo en un momento dado es $v(t) = 11500000 \cdot (0,82)^t$, donde “t” es el tiempo en años. Determine el valor del carro de Ana dentro de:

1.1) Dos años	1.2) Cinco años

2) En 1938 el biólogo Ludwing Von Bertalanffy desarrollo un modelo para calcular la longitud, en centímetros, de un pez que crece bajo condiciones ideales, por un periodo de "x" años. El pez llamado Barracuda tiene un desarrollo modelado por $L = 198 - 197,1 \cdot e^{-0,23x}$. Si se utiliza el modelo de Bertalanffy para una barracuda normal, ¿cuál es la longitud aproximada, en centímetros, al cabo de 2 años?

3) La fórmula de interés compuesto que permite obtener el capital "C", después de "t" años de invertir un capital inicial de ₡500000, a un interés del 8% y capitalizable continuamente, está dada por $C = 500000e^{0,08t}$. De acuerdo con la información anterior, ¿cuántos años se requieren como mínimo, si se desea obtener un capital superior a ₡800 000?

4) Un elemento radiactivo va perdiendo su masa con el paso del tiempo, de acuerdo con la fórmula $M = 60 \cdot 2^{-0,02t}$, donde "M" es la masa, en miligramos, que tiene el elemento transcurrido "t" años, con $t \geq 0$.

4.1) ¿Cuál es la masa, en miligramos, del elemento transcurridos 150 años?

4.2) ¿Cuántos años deben transcurrir para que el elemento tenga una masa de 20mg?

5) Bajo ciertas condiciones, la rapidez "r" del viento, en metros por segundo, en un determinado lugar está dado por $r(x) = \log_2(x)$ donde "x" representa la altura, en metros, sobre el suelo, con $0 < x \leq 40$. De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es la rapidez, en metros por segundo, del viento a 8 m sobre el suelo?

6) La cantidad "P" de pantalones adicionales a los que usualmente vende una tienda en cada mes está dada por $P(x) = \log_2(x)$, donde "x" representa el monto en dólares, que se descuenta al precio de cada pantalón durante el mes, con $2 \leq x \leq 50$. De acuerdo con la información anterior si durante un mes esa tienda vendió cinco pantalones adicionales a los que usualmente vende entonces, ¿cuál fue el monto en dólares que se le descontó del precio de cada uno de esos pantalones?

7) El número "R" de relojes adicionales a los que usualmente vende una empresa, en cada mes, está dado por $R(x) = \log_3(x)$, donde "x" representa la cantidad de dólares que la empresa invierte en publicidad durante el mes, con $81 \leq x \leq 2187$. De acuerdo con la información anterior:

7.1) Si en un mes la empresa invirtió 729 dólares en publicidad, entonces, ¿cuántos relojes adicionales vendió en ese mes?

7.2) ¿Cuántos dólares tuvo que invertir para vender 243 relojes adicionales?

TRABAJO COTIDIANO – Problemas con Funciones Exponenciales y Logarítmicas.	Valoración
Plantea y resuelve problemas en contextos reales usando funciones exponenciales.	
Plantea y resuelve problemas en contextos reales usando funciones logarítmicas	
Aplica modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales y logarítmicas.	

EJERCICIOS ADICIONALES

1) La cantidad de habitantes "P" de una región está dada por $P(t) = 500000e^{0,02t}$ donde "t" es el tiempo en años a partir del inicio del estudio. ¿Cuál es aproximadamente la cantidad de habitantes que se proyecta a los quince años de iniciado el estudio?

- A) 32 663
- B) 370 409
- C) 490 093
- D) 674 929



2) La función dada por $f(x) = e^{0,23x}$ se utiliza para aproximar la cantidad (en millones) de bacterias presentes en un estanque de agua a las "x" horas que iniciaba una investigación. ¿Cuántos millones de bacterias habrá **aproximadamente** al cabo de cinco horas?

- A) 2
- B) 3
- C) 6
- D) 7



3) **Considere la siguiente información:**

Una empresa, proveedora de servicio de telefonía móvil, ha determinado que cuando una noticia es de interés popular, la cantidad "m(x)" de mensajes de texto enviados por los usuarios, a los "x" minutos después de dar a conocer la noticia, está dada por $m(x) = 4^x$.

De acuerdo con la información anterior y tomando en cuenta que el valor de cada mensaje de texto es ₡2,5; ¿Cuánto dinero, en colones, recibe la empresa a los 10 minutos después de dar a conocer una noticia de interés popular?

- A) 100
- B) 320
- C) 419 430
- D) 2 621 440



4) **Considere la siguiente información:**

En un estudio, sobre una población inicial de 600 bacterias, se determina que la cantidad "f(t)" de bacterias, a las "t" horas después de haber iniciado ese estudio, está dada por

$$f(t) = 600 \cdot (3)^{\frac{1}{2}t}$$

De acuerdo con la información anterior, ¿Cuántas horas deben transmitir, después de iniciado ese estudio, para que la población sea de 1800 bacterias?

- A) 0,5
- B) 1,0
- C) 1,5
- D) 2,0



5) En un experimento biológico se determina que la cantidad "p(t)" de células, a los "t" minutos de iniciado el experimento, estado por $p(t) = 50 \cdot 5^{0,2t}$. ¿En cuántos minutos a partir del momento en que se inicia el experimento, habrá 1250 células?

- A) 2
- B) 4
- C) 3,5
- D) 4,5



6) La función f dada por $f(x) = 5e^{-0,4x}$ se utiliza para determinar la cantidad de miligramos de cierto medicamento en el flujo sanguíneo de un paciente "x" horas después de su administración. Si un paciente se le inyecta dicho medicamento a la 1pm, entonces ¿Qué cantidad en miligramos de ese medicamento tendrá aproximadamente a las 3pm de ese mismo día?

- A) 2,25
- B) 0,56
- C) 0,24
- D) 0,12



HABILIDADES

-Analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada.

FUNCIONES Y MODELIZACIÓN

Las funciones cuadráticas, lineales, exponenciales y logarítmicas son tipos fundamentales de funciones que se utilizan en matemáticas para modelar diversos fenómenos y resolver problemas en ciencia, ingeniería y economía, entre otros campos.



TIPO	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	TIPOS DE GRÁFICAS												
Función Lineal	<p style="text-align: center;">$f(x) = mx + b$</p>	<p>Tanto en "x" como en "y" la diferencia de los valores consecutivos siempre es la misma.</p> <table border="1"> <tr><td>x</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr> <tr><td>y</td><td>25</td><td>20</td><td>15</td><td>10</td><td>5</td></tr> </table>	x	2	4	6	8	10	y	25	20	15	10	5
x	2	4	6	8	10									
y	25	20	15	10	5									
Función Cuadrática	<p style="text-align: center;">$f(x) = ax^2 + bx + c$</p>	<p>No tiene un ritmo definido, aunque en el "y" es muy posible ver valores repetidos.</p> <table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr> <tr><td>y</td><td>9</td><td>1</td><td>0</td><td>9</td><td>16</td></tr> </table>	x	1	3	5	7	9	y	9	1	0	9	16
x	1	3	5	7	9									
y	9	1	0	9	16									
Función exponencial	<p style="text-align: center;">$f(x) = a^x$</p>	<p>El valor de "x" va a ritmo constante y puede ser <u>positiva o negativa</u>.</p> <p>El valor de "y" <u>siempre es positivo</u> y aumenta o disminuye a un ritmo más rápido.</p> <table border="1"> <tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>y</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td></tr> </table>	x	1	2	3	4	5	y	2	4	8	16	32
x	1	2	3	4	5									
y	2	4	8	16	32									
Función logarítmica	<p style="text-align: center;">$f(x) = \log_a(x)$</p>	<p>El valor de "x" <u>siempre es positivo</u> y aumenta o disminuye a un ritmo más rápido.</p> <p>El valor de "y" va a ritmo constante y puede ser <u>positiva o negativa</u>.</p> <table border="1"> <tr><td>x</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td><td>81</td><td>243</td></tr> <tr><td>y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table>	x	3	9	27	81	243	y	1	2	3	4	5
x	3	9	27	81	243									
y	1	2	3	4	5									

EJEMPLOS: Resuelva lo que se solicita en cada caso.

1) Considere la siguiente representación de algunos valores de las funciones f, m, n, k e indique cual modelo se adapta a cada una (lineal, cuadrática, exponencial o logarítmica)

x	0	1	4	9	16
f(x)	3	4	5	6	7

x	20	30	40	50	60
m(x)	100	80	60	40	20

x	1	2	3	4	5
n(x)	81	27	9	3	1

x	-2	-1	0	1	2
k(x)	1	0	1	4	6



2) Analice los siguientes contextos e indique cual modelo se adapta a cada uno (lineal, cuadrática, exponencial o logarítmica).

a) Se estudia el movimiento de un objeto que se lanza desde el suelo hacia arriba y luego vuelve a caer. La altura en relación con el tiempo sigue una trayectoria parabólica.

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	12
1	15
2	12
3	5
4	0

R/ _____

b) Estás organizando una fiesta de cumpleaños y estás calculando el costo total en función del número de invitados. El costo por persona es fijo.

Número de invitados	Costo total (en dólares)
10	100
20	200
30	300
40	400
50	500

R/ _____

c) Estás analizando el crecimiento de una población de bacterias en un cultivo con condiciones óptimas de crecimiento.

Tiempo (horas)	Número de bacterias
0	100
1	200
2	400
3	800
4	1600

R/ _____

ACTIVIDAD #1:

A) Considere la siguiente representación de algunos valores de las funciones f, h, k, v e indique cual modelo se adapta a cada una (lineal, cuadrática, exponencial o logarítmica)

x	2	3	4	5	6
f(x)	10	12	15	16	15

x	1	4	16	64	256
h(x)	3	4	5	6	7

x	0	1	2	3	4
k(x)	1	4	16	64	256

x	1	2	3	4	5
v(x)	50	34	19	7	19

x	1	2	3	4	5
r(x)	105	100	95	90	85

x	243	81	27	9	3
p(x)	3	4	5	6	7

B) Analice cada uno de los siguientes contextos y marque con X el tipo de función que representa:

1) La altura alcanzada por un objeto lanzado verticalmente con una fuerza variable.

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4
Altura (metros)	3	6	7	6	3

¿Cuál es la función que mejor se adapta para describir la situación?

- Lineal
 Cuadrática
 Exponencial
 Logarítmica

2) Crecimiento de una población de células de un experimento en un laboratorio.

Tiempo (horas)	1	2	3	4	5
Número de células	100	300	900	2700	8100

¿Cuál es la función que mejor se adapta para describir la situación?

- Lineal
 Cuadrática
 Exponencial
 Logarítmica

3) Pago del pasaje en un autobús respecto a la cantidad de personas que suban

Cantidad de pasajeros	1	2	3	4	5
Monto en colones	650	1300	1950	2600	3250

¿Cuál es la función que mejor se adapta para describir la situación?

- Lineal
 Cuadrática
 Exponencial
 Logarítmica

4) En la siguiente tabla se muestra la cantidad "N(x)" de personas que nacieron cada año en un barrio, en función del tiempo "x" en años, transcurrido desde el año 2024:

x	1	2	3	4	5	6
N(x)	4	9	14	19	24	29

¿Cuál es la función que mejor se adapta para describir la situación?

- Lineal
 Cuadrática
 Exponencial
 Logarítmica

5) Considere la siguiente información referente a la cantidad "s(x)" de litros de leche producidos por una vaca, en función del tiempo "x" en semanas transcurridas desde que comenzó la lactancia, con $1 \leq x \leq 6$:

x	1	2	3	4	5	6
s(x)	36	58	64	69	64	58

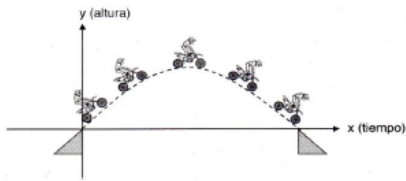
De acuerdo con la información anterior, ¿cuál de las siguientes opciones corresponde al tipo de función que mejor se adapta para modelar la cantidad de litros de leche producidos por esa vaca, en función del tiempo en semanas transcurridas desde que comenzó la lactancia?

- Lineal
 Cuadrática
 Exponencial
 Logarítmica

TRABAJO COTIDIANO –Funciones y Modelización	Valoración
Analiza y determina el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada.	

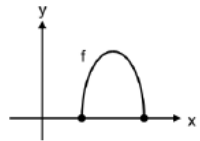
EJERCICIOS ADICIONALES

1) Considere la siguiente imagen en la que aparece la secuencia de un salto en motocicleta:



De acuerdo con la imagen anterior, la función que mejor se adapta para describir la altura que alcanza la motocicleta en función del tiempo, corresponde a una función
A) lineal. B) cuadrática. C) logarítmica. D) exponencial.

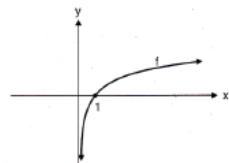
2) Considere la siguiente representación gráfica de una función f que corresponde a las ganancias " $f(x)$ " de una empresa, en millones de colones, por la fabricación y venta de " x " unidades de un producto:



De acuerdo con la información anterior, el criterio de la función que mejor modelaría las ganancias de la empresa corresponde a

- A) $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$ B) $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$
C) $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ D) $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$ y $a \neq 1$

3) Considere la siguiente representación gráfica referente a una función f :



De acuerdo con la representación gráfica anterior, el criterio que mejor se adapta a la función f corresponde a

- A) $f(x) = a^x$, con $a > 1$ B) $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$
C) $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 1$ D) $f(x) = \log_a(x)$, con $0 < a < 1$

www.profeserjiocm.com

4) Considere la siguiente situación:

Jéssica redacta un mensaje de texto y un minuto después, lo envía a sus dos mejores amigos. Al siguiente minuto, sus dos mejores amigos reenvían el mensaje a otras dos personas y estas a su vez hacen lo mismo después de otro minuto. La cadena de envíos del mensaje continúa creciendo cada minuto, cuando cada nuevo receptor del mensaje lo reenvía a otras dos personas.

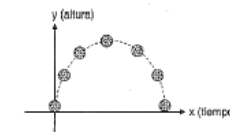
De acuerdo con la información anterior, si " y " es la cantidad de receptores del mensaje, después de " x " minutos a partir del instante en que Jéssica redactó el mensaje, entonces una ecuación que modela la situación anterior corresponde a

- A) $y = 2x$
B) $y = 2^x$
C) $y = 2x^2$
D) $y = \log_2(x)$



5) Considere la siguiente información:

Un juego consiste en lanzar un balón hacia arriba. El balón sigue una trayectoria en la cual la altura que alcanza cambia mientras transcurre el tiempo. El balón parte del suelo, se eleva hasta alcanzar una altura máxima y finalmente cae hasta que vuelve a tocar el suelo, tal y como se ilustra en la siguiente figura.



De acuerdo con la información anterior, si la fuerza de rozamiento del viento es despreciable, entonces el modelo que mejor se ajusta para describir la altura que alcanza el balón en función del tiempo, corresponde a una función.

- A) lineal. B) cuadrática.
C) logarítmica. D) exponencial.

6) Considere la siguiente situación:

Luis es un vendedor de libros y recibe mensualmente un salario base de ₡400000, más una bonificación de ₡8000 por cada libro vendido. De acuerdo con la información anterior, el mejor modelo para representar la relación entre el salario mensual de Luis y la cantidad de libros que vende corresponde a una función

- A) lineal. B) cuadrática.
C) logarítmica. D) exponencial.



www.profeserjiocm.com

7) Considere la siguiente tabla referente a una función f:

x	f(x)
1	0
3	1
9	2
27	3



De acuerdo con la información anterior, el criterio de f corresponde a

- A) $f(x) = 3^x$ B) $f(x) = 3x$
 C) $f(x) = 2x^2$ D) $f(x) = \log_3(x)$

8) En un experimento sobre el crecimiento de ácaros, se seleccionan 1000 de ellos y se les proporciona alimento para su crecimiento y reproducción. En la siguiente tabla se registra semanalmente la cantidad de ácaros, durante tres semanas consecutivas:

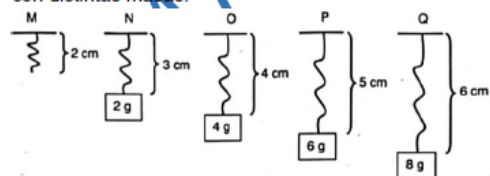
Cantidad "x" de semanas	Cantidad C(x) de ácaros
1	4000
2	7000
3	10000



De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es el criterio que mejor modela la cantidad de ácaros en función de la cantidad de semanas, luego después de seleccionar los 1000 ácaros?

- A) $C(x) = 4000x$ B) $C(x) = \frac{x-1000}{3000}$
 C) $C(x) = 3000x + 1000$ D) $C(x) = 1000x^2 + 3000$

9) Cada una de las siguientes figuras representa un resorte. En la figura M se muestra la longitud, en centímetros, de un resorte que **no** sostiene masa alguna, mientras que en cada una de las figuras N, O, P y Q se muestra la longitud del resorte, cuando este sostiene bloques con distintas masas:



La función que mejor se adapta para describir la longitud en centímetros; del resorte en relación con la masa en gramos que sostiene, corresponde a una función

- A) lineal B) cuadrática
 C) logarítmica D) exponencial

10) Considere la siguiente información:

La cantidad "P(t)" de bacterias presentes en un cultivo depende del tiempo "t", en minutos, transcurrido a partir del momento en que se inicia un experimento. En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de la relación que se da entre el tiempo transcurrido y la cantidad de bacterias:

Minutos	0	1	2	3	4	5
Cantidad de bacterias	25 000	30 000	36 000	43 200	51 840	62 208

De acuerdo con la información anterior, el criterio de la función que mejor se adapta para describir la relación entre la cantidad de bacterias y el tiempo, corresponde a:

- A) $P(t) = \log_a(t)$, con $a > 1$
 B) $P(t) = \log_a(t)$, con $0 < a < 1$
 C) $P(t) = 25000 \cdot a^t$ con $a > 1$
 D) $P(t) = 25000 \cdot a^t$ con $0 < a < 1$



11) Considere la siguiente información:

En un laboratorio se lleva el control de 2 tipos de bacterias denominadas A y B. Uno de los controles consiste en registrar la cantidad de bacterias de cada tipo, a los "d" días de iniciado el experimento.

El experimento inició con una bacteria de cada tipo y el registro de la cantidad de bacterias, durante los primeros 5 días se resume en las siguientes tablas:

Bacterias Tipo A

Día	0	1	2	3	4	5
Cantidad de bacterias	1	2	4	8	16	32

Bacterias Tipo B

Día	0	1	2	3	4	5
Cantidad de bacterias	1	16	31	46	61	76

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones

- I. La relación entre la cantidad de bacterias de tipo A y los días "d" transcurridos después de haber iniciado el experimento, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función exponencial.
 II. La relación entre la cantidad de bacterias de tipo B y los días "d" transcurridos después de haber iniciado el experimento, se adapta mejor a un modelo que corresponde a una función logarítmica.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- A) Ambas
 B) Ninguna
 C) Solo la I
 D) Solo la II

